

# EXERCICE 1

[ Centres Étrangers 2015 ]

## Partie A: Intervalles

1. Ce contrôle remet-il en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3% de cadenas défectueux ?

Pour répondre à cette question, nous allons utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%.

Ici, nous avons: •  $n = 500$

•  $p = 3\%$

•  $f = \frac{19}{500} \Rightarrow f = 3,8\%$ .

Dans ces conditions:

$n = 500 \geq 30$ ,  $n \cdot p = 15 \geq 5$  et  $n \cdot (1 - p) = 485 \geq 5$ .

Les conditions sont donc réunies.

On choisit un échantillon de 500.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% s'écrit:

$$I = \left[ p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right].$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:  $I \approx [0,015; 0,045]$ .

Or:  $f \approx 3,8\% \in I$ .

Ainsi, **non** le test réalisé ne remet pas en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3% de cadenas défectueux.

## 2. Donnons un intervalle de confiance de cette proportion au niveau de confiance 95%:

Ici, nous avons: •  $n = 500$

$$\bullet f = \frac{39}{500} \Rightarrow f = 7,8\%.$$

Dans ces conditions:

$$n = 500 \geq 30, n \cdot f = 39 \geq 5 \text{ et } n \cdot (1 - f) = 461 \geq 5.$$

Les conditions étant réunies, un intervalle de confiance à 95% de cette proportion s'écrit:

$$I = \left[ f - \frac{I}{\sqrt{n}}; f + \frac{I}{\sqrt{n}} \right].$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:  $I \approx [3,3\%; 12,3\%]$ .

## Partie B: Cadenas premier prix

### 1. Calculons $P(725 \leq X \leq 775)$ :

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X est la variable aléatoire qui correspond au nombre de cadenas premier prix vendu par mois.
- X suit la loi normale d'espérance  $\mu = 750$  et d'écart type  $\sigma = 25$ .
- T suit la loi normale centrée réduite.

Il s'agit de calculer:  $P(725 \leq X \leq 775)$ .

Nous remarquons que:  $725 = \mu - \sigma$  et  $775 = \mu + \sigma$ .

Or, d'après le cours,  $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,683$ .

D'où:  $P(725 \leq X \leq 775) \approx 0,683$ .

Au total, la probabilité demandée est de: 68,3%.

## 2. Déterminons la plus petite valeur de l'entier n:

Il s'agit de déterminer l'entier n tel que:  $P(X > n) \leq 0,05$ .

$$P(X > n) \leq 0,05 \Leftrightarrow P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{n - 750}{25}\right) \leq 0,05$$

$$\Leftrightarrow P\left(T > \frac{n - 750}{25}\right) \leq 0,05$$

$$\Leftrightarrow P\left(T \leq \frac{n - 750}{25}\right) \geq 0,95.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$\frac{n - 750}{25} \approx 1,645 \Rightarrow n \approx 791,25$$

$$\Rightarrow n \approx 792 \text{ cadenas.}$$

Au total, la valeur recherchée pour n est d'environ: 792 cadenas.

# EXERCICE 1

## [ Centres Étrangers 2015 ]

### Partie C: Les cadenas

1. Représentons la situation à l'aide d'un arbre pondéré:

D'après l'énoncé, nous avons:

- $H$  = " le cadenas est haut de gamme ".
- $\bar{H}$  = " le cadenas est premier prix ".
- $D$  = " le cadenas prélevé est défectueux ".

- $P(H) = 20\%$
- $P(\bar{H}) = 80\%$   
(  $20\% + 80\% = 1$  ).

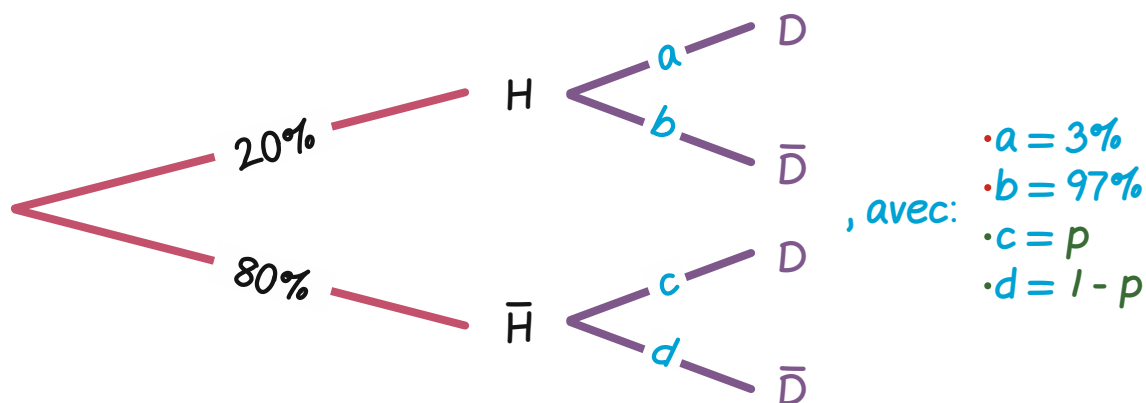
- $P(D) = 7\%$
- $P(\bar{D}) = 93\%$   
(  $7\% + 93\% = 1$  ).

- $P_H(D) = 3\%$
- $P_H(\bar{D}) = 97\%$   
(  $3\% + 97\% = 1$  ).

- $P_{\bar{H}}(D) = p$
- $P_{\bar{H}}(\bar{D}) = 1 - p$   
(  $p + (1 - p) = 1$  ).

Nous pouvons représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

D'où l'arbre pondéré suivant:



2. a. Exprimons  $P(D)$  en fonction de  $p$ :

L'événement  $D = (D \cap H) \cup (D \cap \bar{H})$ .

D'où:  $P(D) = P(D \cap H) + P(D \cap \bar{H})$

$$= P_H(D) \times P(H) + P_{\bar{H}}(D) \times P(\bar{H}).$$

Ainsi:  $P(D) = 3\% \times 20\% + p \times 80\%$

$$\Rightarrow P(D) = 0.8 \times p + 0.006.$$

2. b. Déduisons-en la valeur de  $p$  avec  $P(D) = 7\%$ :

$$P(D) = 7\% \Leftrightarrow 0.8 \times p + 0.006 = 0.07$$

$$\Rightarrow p = 8\%.$$

Au total, la probabilité qu'un cadenas premier prix soit défectueux est de: 8%.

2. c. Le résultat est-il cohérent ?

Oui.

### 3. Déterminons la probabilité que ce soit un cadenas haut de gamme:

Ici, il s'agit de calculer:  $P_{\bar{D}}(H)$ .

$$P_{\bar{D}}(H) = \frac{P(\bar{D} \cap H)}{P(\bar{D})} \Leftrightarrow P_{\bar{D}}(H) = \frac{P_H(\bar{D}) \times P(H)}{1 - P(D)}$$

$$\text{Ainsi: } P_{\bar{D}}(H) = \frac{0.97 \times 0.2}{0.93} \Rightarrow P_{\bar{D}}(H) \approx 20.9\%$$

Au total, la probabilité demandée est de: 20.9%.