

EXERCICE 2

[Centres Étrangers 2016]

Partie A: Étude de quelques exemples

1. a. Déterminons la valeur de " a " si f est une fonction constante strictement positive:

Si f est une fonction constante strictement positive, nous pouvons alors écrire, pour tout $x \in [0; l]$: $f(x) = K$, avec $K > 0$.

Ici, il s'agit de déterminer " a " tel que: $I_1 = I_2$, avec: $I_1 = \int_0^a f(x) dx$
et: $I_2 = \int_a^l f(x) dx$.

f est continue sur $[0; l]$, donc sur $[0; a]$ et $[a; l]$. Elle admet donc des primitives sur $[0; a]$ et $[a; l]$ et par conséquent: I_1 et I_2 existent.

$$\begin{aligned} \text{Dans ces conditions: } I_1 = I_2 &\Leftrightarrow \int_0^a K dx = \int_a^l K dx \\ &\Leftrightarrow [K \cdot x]_0^a = [K \cdot x]_a^l \\ &\Leftrightarrow a \cdot K = K \cdot l - a \cdot K \\ &\Rightarrow a = \frac{l}{2}. \end{aligned}$$

Au total, si f est une fonction constante strictement positive:

$$I_1 = I_2 \text{ ssi } a = \frac{l}{2}.$$

1. b. Déterminons la valeur de " a " si, sur $[0; l]$, $f(x) = x$:

Ici, il s'agit de déterminer " a " tel que: $I_1 = I_2$.

La fonction $f(x) = x$ est continue sur $[0; l]$, donc sur $[0; a]$ et $[a; l]$. Elle admet donc des primitives sur $[0; a]$ et $[a; l]$ et par conséquent: I_1 et I_2 existent.

$$\begin{aligned} \text{Dans ces conditions: } I_1 = I_2 &\Leftrightarrow \int_0^a x \, dx = \int_a^l x \, dx \\ &\Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a = \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^l \\ &\Leftrightarrow \frac{a^2}{2} = \frac{l}{2} - \frac{a^2}{2} \\ &\Leftrightarrow a^2 = \frac{l}{2} \\ &\Rightarrow a = \frac{\sqrt{l}}{2}, \text{ car: } a \in [0; l] \end{aligned}$$

Au total, si $f(x) = x$: $A_1 = A_2$ ssi $a = \frac{\sqrt{l}}{2}$.

2. a. En unités d'aires, exprimons A_1 et A_2 :

$$\begin{aligned} \text{Comme vu précédemment: } &\bullet A_1 = \int_0^a f(x) \, dx \\ &\bullet A_2 = \int_a^l f(x) \, dx. \end{aligned}$$

2. b. b1. Démontrons que si "a" satisfait (E), alors $F(a) = \frac{F(0) + F(l)}{2}$.

Si "a" satisfait la condition (E) alors:

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 &\Leftrightarrow \int_0^a f(x) \, dx = \int_a^l f(x) \, dx. \\ &\Leftrightarrow [F(x)]_0^a = [F(x)]_a^l \\ &\Leftrightarrow F(a) - F(0) = F(l) - F(a) \\ &\Leftrightarrow 2F(a) = F(l) + F(0) \\ &\Leftrightarrow F(a) = \frac{F(l) + F(0)}{2}. \end{aligned}$$

Au total, si " a " satisfait la condition (E) alors nous avons bien:

$$F(a) = \frac{F(1) + F(0)}{2}.$$

2. b. b2. La réciproque est-elle vraie ?

Oui la réciproque est vraie car dans la question précédente, tout a été démontré à l'aide d'équivalences.

3. a. Déterminons le réel " a " tel que la condition (E) soit remplie avec $f(x) = e^x$:

Si " a " satisfait la condition (E) alors:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 &\Leftrightarrow \int_0^a f(x) dx = \int_a^1 f(x) dx. \\ &\Leftrightarrow \int_0^a e^x dx = \int_a^1 e^x dx \\ &\Leftrightarrow [e^x]_0^a = [e^x]_a^1 \\ &\Leftrightarrow e^a - 1 = e - e^a \\ &\Leftrightarrow 2e^a = e + 1 \\ &\Leftrightarrow e^a = \frac{e + 1}{2} \\ &\Rightarrow a = \ln\left(\frac{e + 1}{2}\right), \text{ avec: } \frac{e + 1}{2} > 0. \end{aligned}$$

Au total, quand $f(x) = e^x$, la condition (E) est remplie avec:

$$a = \ln\left(\frac{e + 1}{2}\right), a \text{ étant unique.}$$

3. b. Vérifions que $a = \frac{2}{5}$ quand $f(x) = \frac{1}{(x + 2)^2}$:

Si " a " satisfait la condition (E) alors:

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 \Leftrightarrow \int_0^a f(x) dx = \int_a^1 f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^a \frac{1}{(x+2)^2} dx = \int_a^1 \frac{1}{(x+2)^2} dx$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{-1}{x+2} \right]_0^a = \left[\frac{-1}{x+2} \right]_a^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{a+2} + \frac{1}{2} = \frac{-1}{3} + \frac{1}{a+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{a+2} = \frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow 5a + 10 = 12$$

$$\Rightarrow a = \frac{2}{5}$$

Au total, nous avons bien: $a = \frac{2}{5}$.



freemaths.fr

EXERCICE 2

[Centres Étrangers 2016]

Partie B: Utilisation d'une suite pour déterminer une valeur approchée de " a "

1. Démontrons que si a est un réel satisfaisant (E), alors a est solution de l'équation $x = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}$:

D'après l'énoncé:

- $a \in \mathbb{R}$ et vérifie la condition (E),
- (E): " les aires A_1 et A_2 sont égales ",
- a est tel que: $F(a) = \frac{F(0) + F(1)}{2}$ ($F =$ primitive de f),
- pour tout réel $x \in [0; 1]$, $f(x) = 4 - 3x^2$.

Sur $[0; 1]$, la fonction f admet comme primitive la fonction F , avec: pour tout $x \in [0; 1]$, $F(x) = 4x - x^3$.

Dans ces conditions: $F(0) = 0$ et $F(1) = 4 - 1 \Rightarrow F(1) = 3$.

$$\text{D'où: } \frac{F(0) + F(1)}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Or } a \text{ est tel que: } F(a) = \frac{F(0) + F(1)}{2} \Rightarrow F(a) = \frac{3}{2}.$$

$$F(a) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4a - a^3 = \frac{3}{2} \quad (\text{car } F(x) = 4x - x^3)$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{a^3}{4} + \frac{3}{8}.$$

Ainsi, nous pouvons affirmer que si a est un réel satisfaisant la condition (E), alors a est solution de l'équation: $x = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}$.

2. a. Calculons U_j :

D'après l'énoncé:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ pour tout } x \in [0; 1], g(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}, \\ \bullet U_0 = 0 \text{ et } U_{n+1} = g(U_n). \end{array} \right.$$

Ainsi: $U_1 = g(U_0) \Leftrightarrow U_1 = g(0) \Rightarrow U_1 = \frac{3}{8}$.

D'où: $U_1 = \frac{3}{8}$.

2. b. Démontrons que g est croissante sur $[0; 1]$:

Pour cela, nous devons calculer la dérivée de g sur $[0; 1]$.

Or g est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynôme.

Donc g est dérivable sur $[0; 1]$ et nous avons: $g'(x) = \frac{3}{4} x^2$.

Or pour tout $x \in [0; 1]$, $g'(x) \geq 0$.

Donc nous pouvons affirmer que sur $[0; 1]$: g est croissante.

2. c. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

on a $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 1$:

Nous allons ainsi montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n : $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 1$ ".

Initialisation: $\bullet 0 \leq U_0 \leq U_1 \leq 1$?

oui car nous avons bien: $0 \leq 0 \leq \frac{3}{8} \leq 1$.

Donc vrai au rang " 0 ".

$$\bullet 0 \leq U_1 \leq U_2 \leq 1 ?$$

$$\text{oui car nous avons bien: } 0 \leq \frac{3}{8} \leq 0,388 \leq 1.$$

$\hookrightarrow U_2$

Donc vrai au rang "1".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 1$
et montrons qu'alors: $0 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 1$.

Supposons: $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 1$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

Comme g est croissante sur $[0;1]$, nous pouvons écrire:

$$(1) \Rightarrow g(0) \leq g(U_n) \leq g(U_{n+1}) \leq g(1)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{8} \leq g(U_n) \leq g(U_{n+1}) \leq \frac{1}{4} + \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{8} \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{3}{8} \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq \frac{5}{8} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 1.$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n , nous avons: $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 1$.

2. d. Montrons que la suite (U_n) est convergente et converge vers a :

Nous savons que:

$$\bullet 0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 1 \text{ cad } U_{n+1} - U_n \geq 0.$$

Donc (U_n) est croissante.

- $0 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 1$ cad $0 \leq U_n \leq 1$.

Donc (U_n) est majorée par $M = 1$.

Dans ces conditions, (U_n) étant croissante et majorée, elle est convergente.

Soit " L " la limite de la suite (U_n) .

" L " est unique et est telle que: $g(L) = L$.

$$g(L) = L \Leftrightarrow \frac{L^3}{4} + \frac{3}{8} = L.$$

Or, d'après la question 1., l'équation $\frac{L^3}{4} + \frac{3}{8} = L$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0; 1]$: " a ".

En définitive, la suite (U_n) est convergente et converge vers: $L = a$.

2. e. Calculons U_{10} à 10^{-8} près:

A l'aide d'une machine à calculer, nous trouvons: $U_{10} = 0,38980784$.