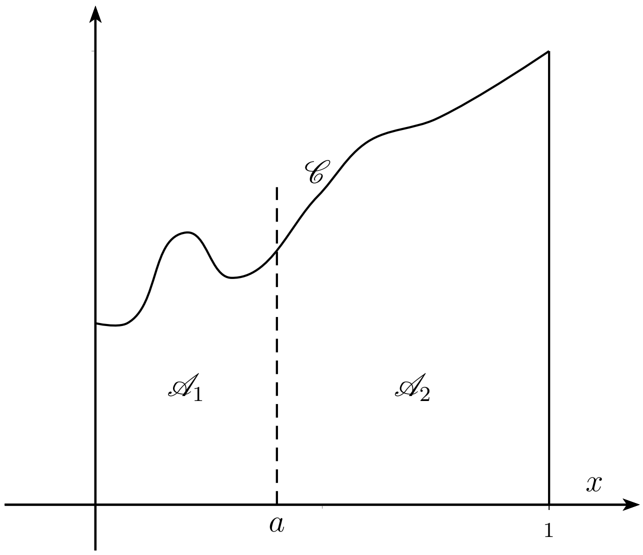
EXERCICE 2 (6 points)

(commun à tous les candidats)

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, continue et positive sur cet intervalle, et a une réel tel que $0 < a < 1$.
On note :
- $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal ;
- $\mathscr{A}_1$ l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'une part, les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$ d'autre part.
- $\mathscr{A}_2$ l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'une part, les droites d'équations $x = a$ et $x = 1$ d'autre part.



Le but de cet exercice est de déterminer, pour différentes fonctions f, une valeur du réel a vérifiant la condition (E) : « les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont égales ».
On admet l'existence d'un tel réel a pour chacune des fonctions considérées.

Partie A - Étude de quelques exemples

1) Vérifier que dans les cas suivants, la condition (E) est remplie pour un unique réel a et déterminer sa valeur.

a) f est une fonction constante strictement positive.

b) f est définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = x$.

2) a) À l'aide d'intégrales, exprimer, en unités d'aires, les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$.

b) On note F une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
Démontrer que si le réel a satisfait la condition (E), alors $F(a) = \dfrac{F(0) + F(1)}{2}$.
La réciproque est-elle vraie ?

3) Dans cette question, on envisage deux autres fonctions particulières.

a) La fonction f est définie pour tout réel x de $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = e^x$.
Vérifier que la condition (E) est remplie pour un unique réel a et donner sa valeur.

b) La fonction f définie pour tout réel x de $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$.
Vérifier que la valeur $a = \dfrac{2}{5}$ convient.

Partie B - Utilisation d'une suite pour déterminer une valeur approchée de a

Dans cette partie, on considère la fonction f définie pour tout réel x de $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = 4 - 3x^2$.
1) Démontrer que si a est un réel satisfaisant la condition (E), alors a est solution de l'équation :

$$x = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}.$$

Dans la suite de l'exercice, on admettra que cette équation a une unique solution dans l'intervalle $[0\ ;\ 1]$. On note a cette solution.

2) On considère la fonction g définie pour tout réel x de $[0\ ;\ 1]$ par $g(x) = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{3}{8}$ et la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = g\left(u_n\right)$.

a) Calculer u_1.

b) Démontrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

d) Prouver que la suite (u_n) est convergente.
À l'aide des opérations sur les limites, prouver que la limite est a.

e) On admet que le réel a vérifie l'inégalité $0 < a - u_{10} < 10^{-9}$. Calculer u_{10} à 10^{-8} près.