EXERCICE 3

[Inde, Pondichéry 2018]

Partie A:

1. a. Calculons $P(X_u < 0,2)$ et $P(0,5 \leq X_u < 0,8)$:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X_u suit la loi normale d'espérance $\mu = 0,58$ mm et d'écart type $\sigma = 0,21$ mm.
- T suit la loi normale centrée réduite.

$$\begin{aligned} \bullet P(X_u < 0,2) &= P\left(\frac{X_u - \mu}{\sigma} < \frac{0,2 - 0,58}{0,21}\right) \\ &= P(T < -1,80952) \\ &= 1 - P(T < 1,80952). \end{aligned}$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(X_u < 0,2) \approx 0,035.$$

$$\bullet P(0,5 \leq X_u < 0,8) = ?$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(0,5 \leq X_u < 0,8) \approx 0,501.$$

Au total, nous avons: $P(X_u < 0,2) \approx 3,5\%$ et $P(0,5 \leq X_u < 0,8) \approx 50,1\%$.

1. b. Déduisons-en une estimation de la masse de sucre récupérée dans le tamis 2 et le récipient à fond étanche:

- Comme $P(0,5 \leq X_u < 0,8) \approx 50,1\%$, nous pouvons affirmer que la masse de sucre récupérée dans le tamis 2 est d'environ:

$$1800 \text{ grammes} \times 50,1\% = 901,8 \text{ grammes.}$$

- Comme $P(X_u < 0,2) \approx 3,5\%$, nous pouvons affirmer que la masse de sucre récupérée dans le récipient à fond étanche est d'environ:

$$1800 \text{ grammes} \times 3,5\% = 63 \text{ grammes.}$$

2. Déterminons la valeur de l'écart type σ de la variable aléatoire X_v :

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X_v suit la loi normale d'espérance $\mu = 0,65$ mm et d'écart type $\sigma = ?$
- T suit la loi normale centrée réduite.

Il s'agit de déterminer σ sachant que: $P(0,5 \leq X_v < 0,8) = 40\%$.

$$P(0,5 \leq X_v < 0,8) = 40\% \Leftrightarrow P\left(\frac{0,5 - 0,65}{\sigma} < \frac{X_v - \mu}{\sigma} < \frac{0,8 - 0,65}{\sigma}\right) = 40\%$$

$$\Leftrightarrow P\left(-\frac{0,15}{\sigma} < T < \frac{0,15}{\sigma}\right) = 40\%$$

$$\Leftrightarrow 2P\left(T < \frac{0,15}{\sigma}\right) - 1 = 40\%$$

$$\text{cad: } P\left(T < \frac{0,15}{\sigma}\right) = 70\%.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$\frac{0,15}{\sigma} \approx 0,5244 \Rightarrow \sigma \approx 0,286 \text{ mm.}$$

Au total, la valeur de l'écart type σ de la variable aléatoire X_v est:

$$\sigma \approx 0,286 \text{ mm.}$$

Partie B:

1. a. Déterminons la probabilité que le paquet prélevé porte le label "extra fin":

D'après l'énoncé, nous avons:

- U = " le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation U ".
- V = " le paquet contient du sucre provenant de l'exploitation V ".
- E = " le paquet porte le label extra fin ".
- $\bar{E}$ = " le paquet ne porte pas le label extra fin ".

- $P(U) = 30\%$
- $P(V) = 1 - 30\% = 70\%$.

- $P_U(E) = 3\%$
- $P_U(\bar{E}) = 1 - 3\% = 97\%$.

- $P_V(E) = 5\%$
- $P_V(\bar{E}) = 1 - 5\% = 95\%$.

Ici nous devons calculer: $P(E)$.

Or, l'événement $E = (E \cap U) \cup (E \cap V)$.

$$\begin{aligned} \text{D'où: } P(E) &= P(E \cap U) + P(E \cap V) \\ &= P_U(E) \times P(U) + P_V(E) \times P(V). \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi: } P(E) = 3\% \times 30\% + 5\% \times 70\% \Rightarrow P(E) = 4,4\%.$$

Au total, la probabilité que le paquet prélevé porte le label extra fin est de: 4,4%.

1. b. Calculons $P_E(U)$:

$$\begin{aligned} P_E(U) &= \frac{P(E \cap U)}{P(E)} \\ &= \frac{P_U(E) \times P(U)}{P(E)}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi: } P_E(U) = \frac{3\% \times 30\%}{4,4\%} \Rightarrow P_E(U) = 20,46\%.$$

Au total, la probabilité demandée est d'environ: 20,46%.

2. Déterminons comment l'entreprise doit s'approvisionner auprès des exploitations U et V:

Soit $x = P(U)$, $P(U)$ étant la probabilité que le paquet contienne du sucre provenant de l'exploitation U.

On désire: $P_E(U) = 30\%$, avec: $x = P(U)$.

$$\text{Or: } P_E(U) = 30\% \Leftrightarrow \frac{P_U(E) \times x}{P_U(E) \times x + P_V(E) \times (1-x)} = 30\%$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{3x + 5(1-x)} = 30\%$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{-2x+5} = 30\%$$

$$\Rightarrow x \approx 0,417.$$

Au total, pour que 30% des paquets portant le label **extra fin** proviennent de l'exploitation U: l'entreprise doit s'approvisionner à hauteur de 41,7% auprès de l'exploitation U et à hauteur de 58,3% auprès de l'exploitation V.

Partie C:

1. A-t-il des raisons de remettre en question l'annonce de l'entreprise ?

Ici, nous avons: • $n = 150$

• $p = 30\%$

• $f = \frac{30}{150} \Rightarrow f = 20\%$.

Dans ces conditions:

$$n = 150 \geq 30, n \cdot p = 45 \geq 5 \text{ et } n \cdot (1 - p) = 105 \geq 5.$$

Les conditions sont donc réunies.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% s'écrit:

$$I = \left[p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right],$$

$$\text{cad: } I = \left[30\% - 1,96 \times \sqrt{\frac{30\% \times 70\%}{150}}; 30\% + 1,96 \times \sqrt{\frac{30\% \times 70\%}{150}} \right].$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I \approx [22,66\%; 37,33\%]$.

Or la fréquence "f", sur l'échantillon, est telle que: $f = 20\% \notin I$.

Ainsi, oui l'acheteur a des raisons de remettre en question l'annonce de l'entreprise.

2. Donnons un intervalle de confiance, au niveau de confiance 95%, de la nouvelle proportion de paquets labellisés "extra fin" provenant de l'exploitation U:

D'après le cours, nous savons qu'un intervalle de confiance, au niveau de confiance 95%, nous est donné par la formule suivante:

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right],$$

avec ici: • $n = 150 \geq 30$,

• $f = 42\%$,

• $n \cdot f = 63 \geq 5$ et $n \cdot (1 - f) = 87 \geq 5$.

D'où: $I = \left[42\% - \frac{1}{\sqrt{150}}; 42\% + \frac{1}{\sqrt{150}} \right] \Rightarrow I \approx [33,84\%; 50,16\%]$.

Au total, l'intervalle de confiance demandé est: $I \approx [33,84\%; 50,16\%]$.