CORRECTION du DS n° 9 (avril 2019)

Exercice n° 1

Partie A) $$C(t)=\frac{143}{11}\left(1-e^{-\frac{11}{80}t}\right)=13\left(1-e^{-\frac{11}{80}t}\right)$$

1) Etude de C(t) sur $[0\,,+\infty[$

$$C'(t)=13\times\left(0-\left(-\frac{11}{80}\right)\times e^{-\frac{11}{80}t}\right)=\frac{143}{80}\times e^{-\frac{11}{80}t}$$

C'est évident qu'on a pour $\forall x\in[0\,,+\infty[\quad C'(t)>0$

La fonction définie par $C(t)=13\left(1-e^{-\frac{11}{80}t}\right)$ est donc croissante sur $[0\,,+\infty[$

2) Calculons la limite de la fonction C au voisinage de $+\infty$ de

Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)=13\times\left(1-e^{0}\right)=0$

On a donc $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)\neq 15$

et donc le traitement de ce patient n'est pas efficace

Partie B) $$f(t)=\frac{115}{x}\left(1-e^{-\frac{11}{80}t}\right)$$

1) Dérivons la fonction définie par $f(t)=\frac{115}{x}\left(1-e^{-\frac{1}{10}t}\right)$

Posons $u(t)=\frac{115}{x}$ et $v(t)=1-e^{-\frac{1}{10}t}$

On a $u'(t)=-\frac{115}{x^2}$ et $v'(t)=0-\frac{1}{10}e^{-\frac{1}{10}t}=-\left(-\frac{1}{10}\right)e^{-\frac{1}{10}t}=\frac{1}{10}e^{-\frac{1}{10}t}$

Comme $f(t)=u(t)\times v(t)$

On a $f'(t) = u'(t)\times v(t)+u(t)\times v'(t) = -\dfrac{115}{t^2}\times\left(1-e^{-\frac{1}{10}t}\right)+\dfrac{115}{t}\times\left(\dfrac{1}{10}e^{-\frac{1}{10}t}\right)$

On a $f'(t) = \dfrac{115}{t^2}\times\left(\dfrac{t}{10}e^{-\frac{1}{10}t}+e^{-\frac{1}{10}t}-1\right)$

C'est-à-dire $f'(t) = \dfrac{115}{t^2}\times g(t)$

D'après l'énoncé , pour tout x $x\in[0,+\infty[$, la fonction g définie par

$g(x) = \dfrac{x}{10}e^{-\frac{1}{10}x}+e^{-\frac{1}{10}x}-1$ est une fonction négative

Pour tout x $x\in[0,+\infty[$ $g(x) \leq 0$

et donc pour tout $x\in[0,+\infty[$ $f'(x) \leq 0$

CONCLUSION :

La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{115}{x}\left(1-e^{-\frac{1}{10}x}\right)$ est une fonction décroissante sur $[0,+\infty[$

2) Appliquons **le théorème de la bijection** à la fonction f sur l'intervalle $[\,1,90\,]$

La fonction f est décroissante sur $[\,1,90\,]$

La fonction f est dérivable donc continue sur $[\,1,90\,]$

$f(1) = \dfrac{115}{1}\left(1-e^{-\frac{1}{10}\times 1}\right)\approx 11$ et $f(90) = \dfrac{115}{90}\left(1-e^{-\frac{1}{10}\times 90}\right)\approx -931\,739$

et comme $6{,}5\in[\,-931\,739\;,\;11\,]$, c'est-à-dire $6{,}5\in[\,f(90)\;,\;f(1)\,]$

on peut conclure que :
l'équation $f(x) = 6{,}5$ a une et une seule solution sur l'intervalle $[\,1,90\,]$

qu'on peut calculer « FACILEMENT » avec l'aide d'une calculatrice et avec la précision demandée qui est dans cette question à 10^{-1} près……

Utilisation de la calculatrice pour le théorème de la bijection :
voir la vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=XEZ5D19FpDQ

Partie C) $C(t)=\frac{d}{a}\left(1-e^{-\frac{a}{80}t}\right)=\frac{115}{a}\left(1-e^{-\frac{a}{80}t}\right)$ car on a $d=115$

Question 1)

Méthode graphique : Comme à $t=8$ on a $C(t)=6{,}5$, on peut écrire que $C(8)=6{,}5$ et comme

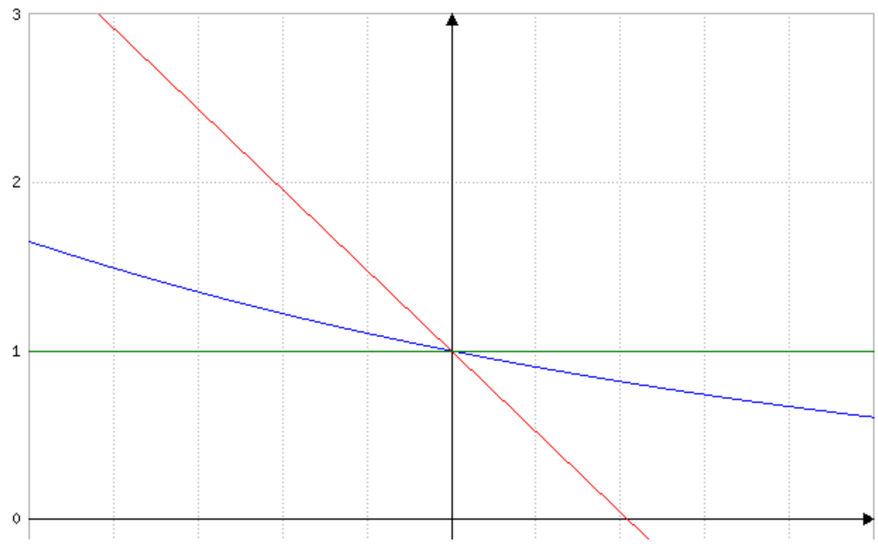
$$C(8) = 6{,}5 \Leftrightarrow \frac{115}{a}\left(1-e^{-\frac{a}{10}}\right) = 6{,}5 \Leftrightarrow 1-e^{-\frac{a}{10}} = 6{,}5\times\frac{a}{115} \Leftrightarrow e^{-\frac{a}{10}} = 1-\frac{11}{23}a$$

CONCLUSION : On cherche le paramètre $a>0$ intersection des courbes des 2 fonctions

définies par $f(x) = e^{-\frac{x}{10}}$ et $g(x) = 1-\frac{11}{23}x$

ET avec l'aide d'une calculatrice, on trace les 2 fonctions : (voir ci-dessous)

Représentation graphique des fonctions



et on voit que le point d'intersection de C_f (en bleu) et de C_g (en rouge) est le point d'abscisse $x = 1$ et donc on a : $a = 1$ (cette méthode graphique ne permet pas d'avoir une précision demandée qui est ici au dixième…. sauf cas exceptionnels…..)

Autre méthode : On peut, également, utiliser une calculatrice pour calculer **via le théorème de la bijection** appliquée à la fonction définie par $f(a)=\frac{115}{a}\left(1-e^{-\frac{a}{10}}\right)$ **sur l'intervalle** $]0,+\infty[$, afin de résoudre l'équation $f(a)=6{,}5$ c'est-à-dire l'équation $C(8) = 6{,}5$

Question 1)

$C(8)=6,5$

Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{115}{a}\left(1-e^{-\frac{a}{80}\times t}\right) = \dfrac{115}{a}(1-0) = \dfrac{115}{a}$

On a donc $\dfrac{115}{a} = 6,5 \iff a = \dfrac{115}{6,5} \iff a \approx 17,7$

Question 2)

On cherche le paramètre d tel que $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)=15$

Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{d}{a}\left(1-e^{-\frac{a}{80}\times t}\right) = \dfrac{d}{a}(1-0) = \dfrac{d}{a}$ (car on sait que $> a > 0$)

On a donc $\dfrac{d}{a} = 15 \iff d = 15\times a \iff d = 15\times 1 = 15$

CORRECTION de l'exercice n° 2

Partie A , question 1) $f(x) = 40\times ln\left(\dfrac{30x}{2-x}\right)$

Montons que la fonction f est strictement croissante sur $]0,2[$

La fonction f est définie sur $]0,2[$ car $\dfrac{30x}{2-x} > 0$ pour tout $x \in]0,2[$

et on a $f(x) = 40\times ln(\,u(x)\,)$ avec $u(x) = \dfrac{30x}{2-x}$

D'après une formule du cours :

$$f'(x) = 40\times\frac{u'(x)}{u(x)} = 40\times\frac{-\dfrac{80}{x(x-2)}}{\dfrac{30x}{2-x}} = -\frac{80}{x(x-2)}\times\frac{30x}{2-x} = -\frac{240}{x-2}$$

On a donc pour tout $x \in]0,2[$ on a : $f'(x) > 0$

On peut conclure que la fonction f est croissante sur $]0,2[$

Partie A , question 2) Calculons x tel que $10 \le f(x) \le 180$

$$10 \le f(x) \le 180 \iff 10 \le 40 \times ln\left(\frac{30x}{2-x}\right) \le 180 \iff \frac{1}{4} \le ln\left(\frac{30x}{2-x}\right) \le \frac{9}{2} \iff e^{\frac{1}{4}} \le \frac{30x}{2-x} \le e^{\frac{9}{2}}$$

$$\iff (2-x) \times e^{\frac{1}{4}} \overset{(*)}{\le} 30x \overset{(**)}{\le} (2-x) \times e^{\frac{9}{2}}$$

et on étudie séparément les 2 inégalités **(*)** et **(**)**

Etude de l'inégalité **(*)**

$$(2-x) \times e^{\frac{1}{4}} \le 30x \iff 2 \times e^{\frac{1}{4}} - x \times e^{\frac{1}{4}} \le 30x \iff 2 \times e^{\frac{1}{4}} \le 30x + x \times e^{\frac{1}{4}} \iff$$

$$2 \times e^{\frac{1}{4}} \le x\left(30 + e^{\frac{1}{4}}\right) \iff x \ge \frac{2 \times e^{\frac{1}{4}}}{30 + e^{\frac{1}{4}}} \iff x \ge 0{,}08$$

et avec une *approximation par excès on a* : $x \ge 0{,}1$

Etude de l'inégalité **(**)**

$$30x \le (2-x) \times e^{\frac{9}{2}} \iff 30x \le 2 \times e^{\frac{9}{2}} - x \times e^{\frac{9}{2}} \iff 30x + x \times e^{\frac{9}{2}} \le 2 \times e^{\frac{9}{2}} \iff$$

c'est-à-dire $\iff x \le \dfrac{2 \times e^{\frac{9}{2}}}{30 + e^{\frac{9}{2}}} \Rightarrow x \le 1{,}5$ *(approximation par défaut)*

CONCLUSION

$x \ge 0{,}1 \quad ou \quad x \le 1{,}5$

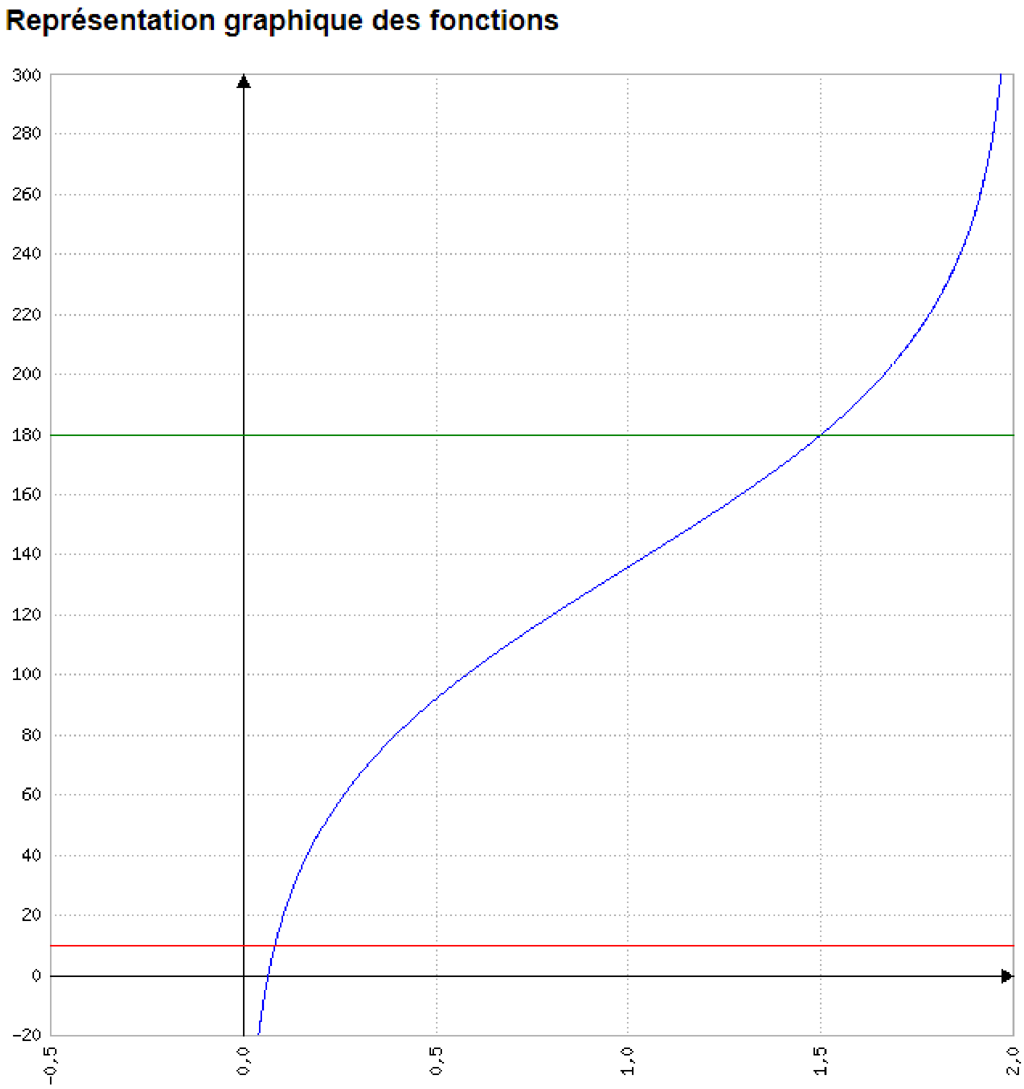
c'est-à-dire $x \in [\, 0{,}1 \,,\, 1{,}5 \,]$

IMPORTANT :

On peut FACILEMENT vérifier GRAPHIQUEMENT le RESULTAT de $10 \leq f(x) \leq 180$

Avec l'aide d'une CALCULTRICE en traçant la courbe C_f *de la fonction définie par*

$f(x) = 40 \times ln\left(\dfrac{30x}{2-x}\right)$ *et les fonctions constantes définies par* $g(x) = 10$ *et* $h(x) = 180$



Par lecture du graphique *(avec l'aide de l'option* **INTERSECTION DE 2 FONCTIONS** *et/ou avec l'aide de l'option* **TRACE** *)* ***on peut voir que le résultat est*** $x \in [\,0{,}1 \;;\; 1{,}5\,]$

Partie B , question 1.a)

Calcul de la vitesse de la fonction f entre les 2 valeurs t_1 *et* t_2 *est* $\dfrac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$

Le nombre $0,24$ dans la cellule E_3 est le résultat du calcul

$\dfrac{22,7-21,5}{105-100} = \dfrac{1,2}{5} = 0,24$ donc il faut programmer dans cette cellule $E3$ la formule $= \dfrac{E2-D2}{E1-D1}$

Partie B , question 1.b

La formule à saisir dans la cellule $F3$ la formule $= \dfrac{F2-E2}{F1-E1}$

Partie B, question 2

Si $x = 0{,}36$ (car en mètres et non pas en cm)

Alors on a : $f(0{,}36) = 40 \times ln\left(\dfrac{30 \times 0{,}36}{2-0{,}36}\right) = 40 \times ln\left(\dfrac{10{,}8}{1{,}64}\right) \approx 74{,}4$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	âges (en années)	70	90	100	105	125	135	155	165	180	200	220	240	250
2	Hauteurs (en mètres)	15,2	19,2	21,5	22,7	27,9	30,5	35,7	38,2	41,8	46,4	50,8	54,8	56,6
3	Vitesse de croissance (en mètres par année)		0,20	0,23	0,24	5,2/20	2,6/10	5,2/20	2,5/10	3,6/15	4,6/20	4,5/20	4/20	1,8/10
						0,26	0,26	0,26	0,25	0,24	0,22	0,225	0,2	0,018

Calcul de la formule de la vitesse dans la cellule I3 $= \dfrac{I2-H2}{I1-H1}$

$$\frac{I2-H2}{I1-H1} = \frac{38{,}2-35{,}7}{165-155} = \frac{2{,}5}{10} = 0{,}25$$

Partie B, question 3.a

On peut calculer les différentes vitesses et compléter le tableau (via Excel par exemple)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	âges (en années)	70	90	100	105	125	135	155	165	180	200	220	240	250
2	Hauteurs (en mètres)	15,2	19,2	21,5	22,7	27,9	30,5	35,7	38,2	41,8	46,4	50,8	54,8	56,6
3	Vitesse croissance (m/a)		0,2	0,23	0,24	0,26	0,26	0,26	0,25	0,24	0,23	0,22	0,2	0,18

Calcul avec la formule **=(F2-E2)/(F1-E1)** dans le cellule F3

ET DONC LA VITESSE MAXIMALE EST $0{,}26$ *mètres / année* pour $f(x) \in [\,125\,,155\,]$

($f(x)$ est l'âge exprimé en années)

Réponse : Quand l'âge appartient à $[\,125\,,155\,]$ alors la vitesse est maximale

Partie B , question 3.b

Un diamètre de 140 cm veut dire que $x = 1{,}4$

Et on a : $f(1{,}4) = 40 \times ln\left(\dfrac{30 \times 1{,}4}{2-1{,}4}\right) = 40 \times ln\left(\dfrac{42}{0{,}6}\right) = 40 \times ln(70) \approx 170$

Comme $170 \notin [\,125\,,155\,]$, le bois n'est pas de qualité optimale….

Donc la réponse à la question : Est-il cohérent de couper les arbres quand le diamètre est environ 140 cm est : NON CE N'EST PAS COHERENT