

BACCALAUREAT GENERAL « BLANC »

Mai 2018

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement spécifique et de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures.

Coefficient : 7 (+2 avec spécialité)

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Le candidat doit traiter 4 exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1**(6 points)****Commun à tous les candidats**

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel strictement positif. Le but de l'exercice est d'étudier l'équation

$$(E_n): \quad \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{n}$$

ayant pour inconnue le nombre réel strictement positif x .

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

On a donné en ANNEXE, qui n'est pas à rendre, la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Étudier les variations de la fonction f .
2. Déterminer son maximum.

Partie B

1. Montrer que, pour $n \geq 3$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[1; e]$ notée α_n .
2. D'après ce qui précède, pour tout entier $n \geq 3$, le nombre réel α_n est solution de l'équation (E_n) .
 - a. Sur le graphique sont tracées les droites D_3 , D_4 et D_5 d'équations respectives $y = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{5}$.
Conjecturer le sens de variation de la suite (α_n) .
 - b. Comparer, pour tout entier $n \geq 3$, $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$.
Déterminer le sens de variation de la suite (α_n) .
 - c. En déduire que la suite (α_n) converge.
Il n'est pas demandé de calculer sa limite.
3. On admet que, pour tout entier $n \geq 3$, l'équation (E_n) possède une autre solution β_n telle que

$$1 \leq \alpha_n \leq e \leq \beta_n.$$

- a. On admet que la suite (β_n) est croissante.
Établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3,

$$\beta_n \geq n \frac{\beta_3}{3}.$$

- b. En déduire la limite de la suite (β_n) .

Exercice 2
Commun à tous les candidats

(5 points)

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.

Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. On dispose de deux dés, identiques d'aspect, dont l'un est truqué de sorte que le 6 apparait avec la probabilité $\frac{1}{2}$. On prend un des deux dés au hasard, on le lance, et on obtient 6.

Affirmation 1 : La probabilité que le dé lancé soit le dé truqué est égale à $\frac{2}{3}$.

2. Soient A et B deux événements tels que : $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,5$ et $P(A \cup B) = 0,7$

Affirmation 2 : Les événements A et B sont indépendants pour P

Dans les questions 3., 4. et 5., on considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

3. **Affirmation 3 :** L'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$

4. **Affirmation 4 :** La fonction f est impaire et périodique de période π sur son ensemble de définition.

5. **Affirmation 5 :** La courbe représentative de f admet une asymptote verticale en 0

Exercice 3
Commun à tous les candidats

(4 points)

On considère un cube ABCDEFCH donné en annexe (à rendre avec la copie).

On note M le milieu du segment [EH], N celui de [FC] et P le point tel que

$$\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}.$$

Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L.
Construire le point L
2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection.
On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.
 - a. Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.
 - b. Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).
3. En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP).

Partie B

L'espace est rapporté au repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Donner les coordonnées des points M, N et P dans ce repère.
2. Déterminer les coordonnées du point L.
3. On admet que le point T a pour coordonnées $(1 ; 1 ; \frac{5}{8})$.
Le triangle TPN est-il rectangle en T ?

Indication : Comme le repère est orthonormé, on pourra utiliser le produit scalaire

ou bien la formule $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Exercice 4**(5 points)****Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.

Partie A

Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0,3 \\ u_{n+1} &= 0,9u_n(1 - u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n , u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000 + n$.

1. Calculer, dans ce modèle, le nombre de tortues au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.
2. On admet que, pour tout entier naturel n , u_n et $1 - u_n$ appartiennent à l'intervalle $[0; 1]$.
 - a. Montrer que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_{n+1} \leq 0,9u_n$.
 - b. Montrer que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$.
 - c. Déterminer la limite de la suite (u_n) . Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues?
3. Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction.

On souhaite qu'à la fin de son exécution, l'algorithme ci-dessous affiche la dernière année **avant** laquelle il reste au moins 30 tortues.

Recopier et compléter l'algorithme afin qu'il satisfasse cette exigence.

Variables :	u est un réel n est un entier naturel
Traitement :	u prend la valeur 0,3 n prend la valeur 0 Tant que ... faire : Fin Tant que
Sortie :	Afficher ...

Partie B

Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues. Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues. L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_{10} &= 0,032 \\ v_{n+1} &= 1,06v_n(1 - v_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel $n \geq 10$, v_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000 + n$.

1. Calculer le nombre de tortues au début de l'année 2011 puis de l'année 2012.
2. On admet que, dans ce modèle, la suite (v_n) est croissante et convergente. On appelle ℓ sa limite. Montrer que ℓ vérifie :

$$\ell = 1,06\ell(1 - \ell).$$

3. La population de tortues est-elle encore en voie d'extinction ?

Exercice 4

(5 points)

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère la suite définie par son premier terme $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , par

$$u_{n+1} = 2u_n + 6.$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 9 \times 2^n - 6.$$

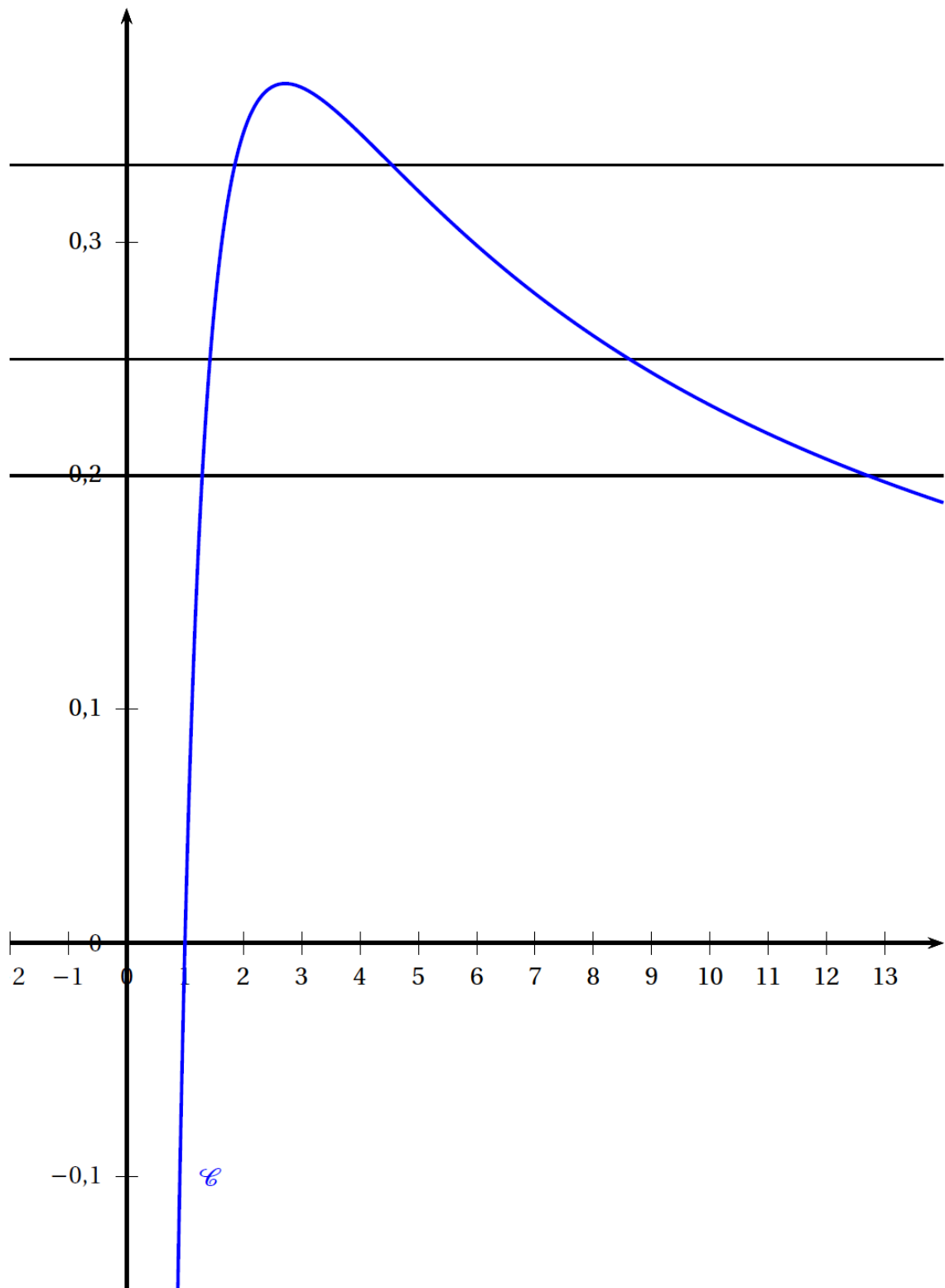
2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, u_n est divisible par 6.

On définit la suite d'entiers (v_n) par, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_n = \frac{u_n}{6}$.

3. On considère l'affirmation : « pour tout entier naturel n non nul, v_n est un nombre premier ». Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
4.
 - a. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $v_{n+1} - 2v_n = 1$.
 - b. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.
 - c. En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, le PGCD de u_n et u_{n+1} .
5.
 - a. Vérifier que $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$.
 - b. En déduire que si n est de la forme $4k + 2$ avec k entier naturel, alors u_n est divisible par 5.
 - c. Le nombre u_n est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de l'entier naturel n ? Justifier.

ANNEXE de l'exercice 1

Cette annexe n'est pas à rendre.



ANNEXE de l'exercice 3
(à rendre avec la copie)

