Kit de survie : Espace

1) Coordonnées dans l'espace

Dans un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ orthonormé :

▶ Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors :

• pour tout réel k, $k\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$.

• les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u}=k\overrightarrow{v}$.

• les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $xx'+yy'+zz'=0$.

• la **norme** du vecteur $\overrightarrow{u}$ (c'est à dire sa longueur) est le réel noté $\|\overrightarrow{u}\|$ tel que : $\|\overrightarrow{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

▶ Si $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$ alors :

• le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est tel que : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \\ z_B-z_A \end{pmatrix}$.

• le **milieu** I de $[AB]$ est tel que : $I\begin{pmatrix} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2} \\ z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2} \end{pmatrix}$.

• la **distance** AB est telle que $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

• Trois points A, B et C (distincts 2 à 2) sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

2) Vecteurs coplanaires

PROPRIÉTÉ

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels a et b tels que $a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v}=\overrightarrow{w}$.

▶ *Exemple :* Montrons que $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont coplanaires.

• $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.

On cherche a et b tels que $a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v}=\overrightarrow{w} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} 3b=3 \\ 4a-b=7 \\ -2a+2b=-2 \end{cases}$

• On résoud le système formé par deux des trois équations : $\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} 3b=3 \\ 4a-b=7 \end{cases}$. L_1 donne $b=1$. On en déduit avec L_2 que $a=2$.

• Les vecteurs seront coplanaires si a et b sont aussi solutions de la troisième équation.

Or, $-2a+2b=-2\times 2+2\times 1=-2$. a et b sont aussi solutions de L_3. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont bien coplanaires.

▶ **Remarque :** Pour montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires, il suffit de prouver que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

3) Équations de plan

PROPRIÉTÉS

• Tout plan admet une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$ (a, b et c non tous muls).

• Un vecteur normal (orthogonal) au plan est le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

• Un plan dont un vecteur normal est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$.

▶ **Remarques :**

• Pour montrer que deux plans sont parallèles, il suffit de montrer qu'un vecteur normal de l'un est colinéaire à un vecteur normal de l'autre.

• Pour montrer que deux plans sont orthogonaux, il suffit de montrer qu'un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

Comment déterminer une équation du plan (ABC) connaissant les coordonnées des points A, B et C ?

• On cherche un vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. *($\overrightarrow{n}$ est alors un vecteur normal du plan)*

• Le plan admet alors une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$. Pour déterminer d, on exprime que les coordonnées du point A doivent vérifier l'équation du plan.

▶ *Exemple :* Détermination d'une équation du plan (ABC) avec $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

• Cherchons $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tel que $\overrightarrow{u}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et à $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On obtient le système $\begin{cases} b + 2c = 0 \\ 5a + 4b - 2c = 0 \end{cases}$.

On prend alors $c = 1$. *(si on aboutit à une impossibilité, essayer avec $a = 1$ ou $b = 1$)*

On en déduit que $b = -2c = -2$, puis que $5a = -4b + 2c = -10$.

$a = 2$, $b = -2$ et $c = 1$ conviennent. Le plan admet une équation de la forme $2x - 2y + z + d = 0$.

• Les coordonnées de A doivent vérifier l'équation. On a donc $2\times 0 - 2\times 0 + 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$.

• Une équation du plan est : $2x - 2y + z - 2 = 0$.

4) Système d'équations d'une droite

PROPRIÉTÉ

Si une droite D est l'intersection des plans $P : ax + by + cz + d = 0$ et $Q : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ alors $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ est un système d'équations de cette droite.

Pour déterminer un vecteur directeur d'une droite D :

• Méthode 1 : si on connait deux points distincts A et B de cette droite, un vecteur directeur de D est alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

• Méthode 2 : on utilise le fait que si un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à un vecteur normal du plan P et à un vecteur normal du plan Q alors il forme un vecteur directeur de la droite D.

▶ *Exemple :* Déterminons un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de la droite définie par le système $\begin{cases} x + 4z - 2 = 0 \\ x + y + z - 5 = 0 \end{cases}$. On cherche $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tel que $\overrightarrow{u}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ (vecteur normal du premier plan) et à $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (vecteur normal du deuxième plan).

On obtient le système : $\begin{cases} a + 4c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$

On prend alors $c = 1$. *(si on aboutit à une impossibilité, essayer avec $a = 1$ ou $b = 1$)*

On en déduit $a = -4$ et $b = 3$. Un vecteur directeur de la droite est donc $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

▶ **Remarques :**

• Pour montrer que deux droites sont parallèles, il suffit de montrer qu'un vecteur directeur de l'une est colinéaire à un vecteur directeur de l'autre.

• Pour montrer que deux droites sont orthogonales, il suffit de montrer qu'un vecteur directeur de l'une est orthogonale à un vecteur directeur de l'autre.

• Pour montrer qu'une droite est parallèle à un plan, il suffit de montrer qu'un vecteur directeur de la droite est orthogonal à un vecteur normal du plan.

• Pour montrer qu'une droite est orthogonal à un plan, il suffit de montrer qu'un vecteur directeur de la droite est colinéaire à un vecteur normal du plan.

5) Surfaces - Courbes de niveau

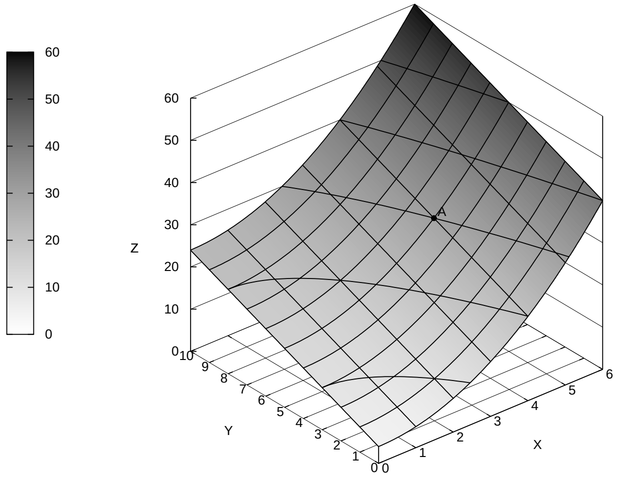
DÉFINITION

• Soit x un réel d'un intervalle I et y un réel d'un intervalle J. Définir une fonction f des deux variables x et y, c'est associer à chaque couple (x, y) un unique réel noté $f(x, y)$. La représentation graphique de f dans un repère de l'espace est une **surface** d'équation $z = f(x, y)$.

• L'intersection d'une surface d'équation $z = f(x, y)$ avec un plan parallèle aux plans de coordonnées est appelée **courbe de niveau**.

Exemple : l'intersection entre la surface et le plan horizontal d'équation $z = a$ est appelée courbe de niveau $z = a$. On obtient une équation de cette courbe de niveau en remplaçant z par a dans l'équation de la surface.

► *Exemple :* La surface ci-dessous représente la fonction de deux variables f définie par $f(x, y) = x^2 + 2y + 4$ pour $x \in [0; 6]$ et $y \in [0; 10]$. Son équation est $z = x^2 + 2y + 4$.



• Le point A de la surface a pour coordonnées $(4; 5; 30)$.
• La courbe de niveau $z = 30$ est définie par le système :

$$\begin{cases} z = x^2 + 2y + 4 \\ z = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30 = x^2 + 2y + 4 \\ z = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2y = 26 \\ z = 30 \end{cases}$$

6) Optimisation sous contrainte

Principe : Soit f une fonction de deux variables x et y.
Si on rajoute une contrainte de la forme $y = mx + p$, $f(x, y)$ ne dépend plus alors que de la variable x.
On peut alors poser $g(x) = f(x, y)$ ($g(x)$ s'obtient en remplaçant y par $mx + p$).
Rechercher l'optimisation sous cette contrainte revient alors à rechercher l'extremum de la fonction g (cela se fait en étudiant les variations de g).