Kit de survie : Suites

1) Etude du sens de variation

Méthode 1 *(la plus fiable - convient dans tous les cas)*
• Si pour tout $n \geqslant 0$, $U_{n+1} - U_n \geqslant 0$ alors la suite (U_n) est croissante.
• Si pour tout $n \geqslant 0$, $U_{n+1} - U_n \leqslant 0$ alors la suite (U_n) est décroissante.

Méthode 2 : pour les suites dont tous les termes sont **strictement positifs**
• Si pour tout $n \geqslant 0$, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \geqslant 1$ alors la suite (U_n) est croissante.
• Si pour tout $n \geqslant 0$, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \leqslant 1$ alors la suite (U_n) est décroissante.

Méthode 3 : pour les suites définies de façon explicite par $U_n = f(n)$.
• Si f est croissante sur $[0; +\infty[$ alors la suite est croissante.
• Si f est décroissante sur $[0; +\infty[$ alors la suite est décroissante.

2) Suites arithmétiques

On passe d'un terme au terme suivant en ajoutant toujours le même nombre a appelé raison de la suite.
• Pour tout n : $U_{n+1} = U_n + a$; $U_n = U_0 + na$; $U_n = U_p + (n-p)a$
• Si pour tout n, $U_{n+1} - U_n =$ constante alors (U_n) est une suite arithmétique de raison égale à la constante.
• $U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n = (n-p+1) \times \dfrac{U_p + U_n}{2} = (\text{nb de termes}) \times \dfrac{\text{1er terme} + \text{dernier}}{2}$
• Si la raison a est positive, la suite est croissante.
• Si la raison a est négative, la suite est décroissante.
• Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique se situent sur une même droite.

► *Exemple :*
Soit (U_n) la suite arithmétique de 1er terme $U_0 = 2$ et de raison $a = 3$.
$U_{10} = U_0 + 10a = 2 + 10 \times 3 = 32$; $U_{33} = U_0 + 33a = 2 + 33 \times 3 = 101$
Pour tout n, $U_n = U_0 + na = 2 + 3n$.
$U_0 + U_1 + \cdots + U_{10} = 11 \times \dfrac{2+32}{2} = 187.$
La suite est strictement croissante car $a > 0$.

3) Suites géométriques

On passe d'un terme au terme suivant en multipliant toujours par le même nombre b appelé raison de la suite.
• Pour tout n : $U_{n+1} = b \times U_n$; $U_n = b^n \times U_0$; $U_n = b^{n-p} \times U_p$
• Si pour tout n, $\frac{U_{n+1}}{U_n} =$ constante alors (U_n) est une suite géométrique de raison égale à la constante.
• $U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n = U_p \times \dfrac{1 - b^{n-p+1}}{1-b} = \text{1er terme} \times \dfrac{1 - b^{\text{nb de termes}}}{1-b}$ (pour $b \neq 1$)
• Pour étudier le sens de variation, on calcule $U_{n+1} - U_n$ et on factorise.
(remarque : si $b < 0$ la suite est ni croissante, ni décroissante - il est donc inutile de faire le calcul)

► *Exemple :*
Soit (U_n) la suite géométrique de 1er terme $U_0 = 5$ et de raison $b = 2$.
$U_4 = b^4 \times U_0 = 2^4 \times 5 = 80$; $U_{10} = b^{10} \times U_0 = 2^{10} \times 5 = 5120$
Pour tout n, $U_n = b^n \times U_0 = 5 \times 2^n$.
$U_0 + U_1 + \cdots + U_8 = 5 \times \dfrac{1 - 2^9}{1-2} = 2555$. $U_{n+1} - U_n = 5 \times 2^{n+1} - 5 \times 2^n = 5 \times 2^n \times (2-1) = 5 \times 2^n > 0$. La suite est croissante.

4) Raisonnement par récurrence

Principe général :
Pour montrer qu'une propriété dépendant d'un entier n est vraie pour tout $n \geqslant n_0$:
• on vérifie que la propriété est vraie au rang n_0.
• on suppose la propriété vraie au rang p *(en traduisant ce que cela signifie)* et on montre qu'alors la propriété est vraie au rang $p+1$.
• on conclut en disant que la propriété est donc vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

► *Exemple :*
Montrons par récurrence que la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$ est positive et majorée par 2 :
• $0 \leqslant U_0 \leqslant 2$. La propriété est vraie au rang 0.
• On suppose la propriété vraie au rang p, c'est à dire que $0 \leqslant U_p \leqslant 2$.
On a alors : $2 \leqslant 2 + U_p \leqslant 4 \Rightarrow \sqrt{2} \leqslant \sqrt{2 + U_p} \leqslant 2 \Rightarrow 0 \leqslant U_{p+1} \leqslant 2$.
La propriété est alors vraie au rang $p+1$.
• Elle est donc vraie pour tout n.

5) Limites de suite

• Une suite (U_n) est dite **convergente** s'il existe un **réel** l tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$.
• La suite est dite **divergente** si elle n'admet pas de limite ou si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \pm\infty$
• Les théorèmes sur les opérations avec les limites de fonction restent valables pour les suites.

Pour les suites définies par $U_n = f(n)$: si f admet une limite en $+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
(dans la pratique, on peut continuer à utiliser n comme variable)

► *Exemple :*
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Limite de b^n :
• si $-1 < b < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} b^n = 0$.
• si $b > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} b^n = +\infty$.
• si $b < -1$ alors la suite de terme général b^n n'admet pas de limite.

► *Exemples :*
• $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{3}\right)^n = +\infty$ car $\sqrt{3} > 1$.
• $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 3$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$.

Théorémes de comparaison :
• si pour tout $n \geqslant n_0$, $U_n \geqslant V_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.
• si pour tout $n \geqslant n_0$, $U_n \leqslant W_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$.
• si pour tout $n \geqslant n_0$, $V_n \leqslant U_n \leqslant W_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = l$ (l réel) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$.

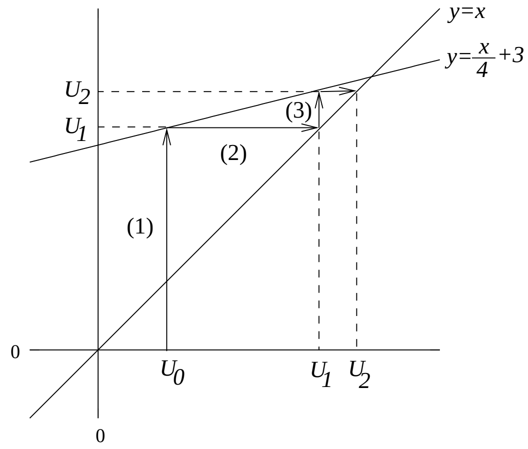
► *Exemple :*
Pour tout $n \geqslant 1$, $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\cos n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos n}{n} = 0$.

Convergence des suites monotones :
• toutes suite croissante et majorée est convergente.
• toutes suite décroissante et minorée est convergente.

6) Suites récurrentes : $U_{n+1} = aU_n + b$

► ***Exemple 1 :*** *utilisation d'une suite géométrique*
Soit (U_n), la suite définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{4} + 3$.

a) Représenter graphiquement les premiers termes de la suite.
On trace d'abord la droite d'équation $y = \dfrac{x}{4} + 3$ et la droite d'équation $y = x$.
On part de U_0 en abscisse : l'ordonnée du point de la courbe correspondant à cette abscisse nous donne U_1 [(1) *sur le graphique*] .
Pour déterminer $U_2 = f(U_1)$, il nous faut rabattre U_1 sur l'axe des abscisses [(2) *sur le graphique*] en utilisant la droite d'équation $y = x$.
Dès lors, U_2 est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse U_1 [(3) *sur le graphique*].
Pour poursuivre la construction, on répéte le procédé en rabattant U_2 sur l'axe des abscisses...



b) Montrer que la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 4$ est géométrique.

Pour tout n, $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{U_{n+1}-4}{U_n-4} = \dfrac{\frac{U_n}{4}+3-4}{U_n-4} = \dfrac{\frac{U_n}{4}-1}{U_n-4} = \dfrac{\frac{1}{4}(U_n-4)}{U_n-4} = \dfrac{1}{4}$.

(V_n) est donc géométrique de raison $b = \dfrac{1}{4}$.

c) En déduire l'expression de V_n, puis de U_n en fonction de n.

Pour tout n, $V_n = b^n \times V_0 = -3\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ (car $V_0 = U_0 - 4 = 1 - 4 = -3$).

$V_n = U_n - 4 \Leftrightarrow U_n = V_n + 4 = -3\left(\dfrac{1}{4}\right)^n + 4$

d) Déterminer la limite de la suite (U_n).

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{-3\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}_{\to 0} + 4 = 4$ (car $-1 < \frac{1}{4} < 1$).

e) Déterminer l'expression de $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ en fonction de n.

$S_n = V_0 + 4 + V_1 + 4 + \cdots + V_n + 4 = V_0 + V_1 + \cdots + V_n + 4(n+1)$.

Or (V_n) est géométrique, donc :

$V_0 + V_1 + \cdots + V_n = V_0 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} = -3 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} = -4 \times \left(1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$.

D'où, $S_n = -4 \times \left(1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right) + 4(n+1)$.

► ***Exemple 2 :*** *étude de la limite sans recherche de l'expression de U_n*

Soit (U_n), la suite définie par $U_0 = 4$ et $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{2} + 1$.

a) Montrer par récurrence que (U_n) est décroissante.

Il s'agit de montrer que, pour tout n, $U_{n+1} - U_n \leqslant 0$.

- $U_1 - U_0 = \dfrac{4}{2} + 1 - 4 = -1 \leqslant 0$. La propriété est vraie au rang 0.
- On suppose la propriété vraie au rang p, c'est à dire que $U_{p+1} - U_p \leqslant 0$.

On a alors : $U_{p+2} - U_{p+1} = \left(\dfrac{U_{p+1}}{2} + 1\right) - \left(\dfrac{U_p}{2} + 1\right) = \dfrac{1}{2}\underbrace{(U_{p+1} - U_p)}_{\leqslant 0} \leqslant 0$.

La propriété est alors vraie au rang $p+1$. Elle est donc vraie pour tout n.

b) Montrer par récurrence que (U_n) est minorée par 2.

- $U_0 = 4 \geqslant 2$. La propriété est vraie au rang 0.
- On suppose la propriété vraie au rang p, c'est à dire que $U_p \geqslant 2$.

On a alors : $\dfrac{U_p}{2} \geqslant 1 \Rightarrow \dfrac{U_p}{2} + 1 \geqslant 2 \Rightarrow U_{p+1} \geqslant 2$.

La propriété est alors vraie au rang $p+1$. Elle est donc vraie pour tout n.

c) Justifier que (U_n) converge vers une limite l que l'on déterminera.

(U_n) est décroissante et minorée, donc elle converge vers une limite l qui est nécessairement une solution de l'équation $x = \dfrac{x}{2} + 1$. Or, $x = \dfrac{x}{2} + 1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = 2$. (U_n) converge vers 2.

Remarque : Si une suite (U_n) définie par $U_{n+1} = f(U_n)$ admet une limite réelle l et si la fonction f est continue sur un intervalle contenant l alors on a $l = f(l)$.

7) Suites récurrentes : $U_{n+2} = aU_{n+1} + bU_n$

► ***Exemple :***

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 1$, $U_1 = 2$ et $U_{n+2} = 5U_{n+1} - 4U_n$.

a) Montrer que la suite (V_n) définie par $V_n = U_{n+1} - U_n$ est une suite géométrique.

Pour tout n, $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{U_{n+2} - U_{n+1}}{U_{n+1} - U_n} = \dfrac{5U_{n+1} - 4U_n - U_{n+1}}{U_{n+1} - U_n} = \dfrac{4U_{n+1} - 4U_n}{U_{n+1} - U_n} = 4$.

(V_n) est géométrique de raison $b = 4$ et de premier terme $V_0 = U_1 - U_0 = 1$.

b) Exprimer V_n en fonction de n.

$V_n = b^n \times V_0 = 4^n$.

c) Montrer que, pour tout n, $U_n = U_0 + (V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_{n-1})$.

$U_0 + (V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_{n-1}) = U_0 + (U_1 - U_0) + (U_2 - U_1) + (U_3 - U_2) + \cdots + (U_n - U_0) = U_n$ (par élimination).

d) En déduire une expression de U_n en fonction de n.

(V_n) est géométrique, donc $V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_{n-1} = V_0 \times \dfrac{1-4^n}{1-4} = \dfrac{1}{3} \times (4^n - 1)$.

D'où, $U_n = U_0 + \dfrac{1}{3} \times (4^n - 1) = 1 + \dfrac{1}{3} \times 4^n - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3} \times 4^n + \dfrac{2}{3}$.

e) Etudier la limite de la suite (U_n).

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{\dfrac{1}{3} \times 4^n}_{\to+\infty} + \dfrac{2}{3} = +\infty$ (car $4 > 1$).