Kit de survie : - Bac STL STI2D

1) Inégalités - Étude du signe d'une expression

a) Opérations sur les inégalités

Règles usuelles :

Pour tout a :	$x < y \Leftrightarrow x + a < y + a$	*même sens*
Pour tout $k > 0$:	$x < y \Rightarrow kx < ky$	*même sens*
Pour tout $k < 0$:	$x < y \Rightarrow kx > ky$	*sens contraire*
Pour x et y de même signe :	$x < y \Rightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$	*sens contraire*
Pour $x > 0$ et $y > 0$:	$x < y \Rightarrow x^2 < y^2$	*même sens*
Pour $x > 0$ et $y > 0$:	$x < y \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$	*même sens*
Si f croissante * :	$x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$	*même sens*
Si f décroissante * :	$x < y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$	*sens contraire*

(* sur un intervalle contenant x et y)

► *Exemple :*

• Sachant que $3 < x < 5$, que peut-on en conclure pour $\dfrac{1}{3-x}$?

$3 < x < 5 \Rightarrow -5 < -x < -3 \Rightarrow -2 < 3 - x < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{3-x} < -\dfrac{1}{2}$

b) Inégalités classiques

Pour tout x : $\quad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \quad ; \quad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

c) Signe de $ax + b$ $\quad (a \neq 0)$

On détermine la valeur de x qui annule $ax + b$, puis on applique la règle : « signe de a après le 0 ».

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		signe de $(-a)$	0	signe de a	

d) Signe de $ax^2 + bx + c$ $\quad (a \neq 0)$

On calcule la discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ (sauf cas évidents)

• Si $\Delta < 0$, on applique la règle : « toujours du signe de a ».

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	

• Si $\Delta = 0$, on calcule la racine double : $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$.

On applique alors la règle : « toujours du signe de a et s'annule pour $x = x_1$ ».

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

• Si $\Delta > 0$, on calcule les deux racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

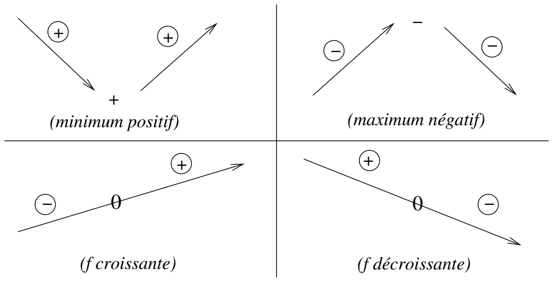
On applique alors la règle : « signe de a à l'extérieur des racines ».

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a	

(on suppose que $x_1 < x_2$)

e) Utilisation des variations d'une fonction pour déterminer son signe

Les cas les plus classiques :



f) Pour les autres expressions :

Pour étudier le signe d'une expression $A(x)$ (qui n'est pas du premier, ni du second degré et après avoir factorisé au maximum) sur un intervalle I, on résout l'inéquation $A(x) \geqslant 0$ *(on cherche ce qui annule l'expression et où mettre le(s) signe(s) +).*

► *Exemple :* Étude du signe de $(3 - \ln x)$ sur $I =]0; +\infty[$.
$3 - \ln x \geqslant 0 \Leftrightarrow 3 \geqslant \ln x \Leftrightarrow \ln(e^3) \geqslant x \Leftrightarrow e^3 \geqslant x$.
On en conclut que l'expression s'annule pour $x = e^3$ et qu'il faut mettre le signe + pour $0 < x < e^3$:

x	0		e^3		$+\infty$
$3 - \ln x$	‖	$+$	0	$-$	

2) Étude de fonction

a) Limites

• Limite d'une somme :

$\underbrace{(\quad)}_{\to l}+\underbrace{(\quad)}_{\to l'} \to l+l'$	$\underbrace{(\quad)}_{\to l}+\underbrace{(\quad)}_{\to +\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\to l}+\underbrace{(\quad)}_{\to -\infty} \to -\infty$
$\underbrace{(\quad)}_{\to +\infty}+\underbrace{(\quad)}_{\to +\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\to -\infty}+\underbrace{(\quad)}_{\to -\infty} \to -\infty$	

• Limite d'un produit :

$\underbrace{(\quad)}_{\to l}\times\underbrace{(\quad)}_{\to l'} \to l\times l'$	$\underbrace{(\quad)}_{\to l>0}\times\underbrace{(\quad)}_{\to +\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\to l<0}\times\underbrace{(\quad)}_{\to +\infty} \to -\infty$
$\underbrace{(\quad)}_{\to l>0}\times\underbrace{(\quad)}_{\to -\infty} \to -\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\to l<0}\times\underbrace{(\quad)}_{\to -\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\to +\infty}\times\underbrace{(\quad)}_{\to +\infty} \to +\infty$
$\underbrace{(\quad)}_{\to -\infty}\times\underbrace{(\quad)}_{\to -\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\to -\infty}\times\underbrace{(\quad)}_{\to +\infty} \to -\infty$	

• Limite de l'inverse :

$\left(\dfrac{1}{\underbrace{(\quad)}_{\to l\neq 0}}\right) \to \frac{1}{l}$	$\left(\dfrac{1}{\underbrace{(\quad)}_{\to \pm\infty}}\right) \to 0$	$\left(\dfrac{1}{\underbrace{(\quad)}_{\to 0^+}}\right) \to +\infty$	$\left(\dfrac{1}{\underbrace{(\quad)}_{\to 0^-}}\right) \to -\infty$

• Limite d'un quotient :

Pour les quotients (autres que les fonctions rationnelles en $\pm\infty$), on « sépare la fraction » : $\dfrac{(\quad)}{(\quad)} = (\quad) \times \dfrac{1}{(\quad)}$

• **Formes indéterminées :**

Les deux cas de forme indéterminée sont : $\underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty} + \underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty}$; $\underbrace{(\ \ )}_{\to \pm\infty} \times \underbrace{(\ \ )}_{\to 0}$

• **Polynômes et fonctions rationnelles en $\pm\infty$:**

• En $\pm\infty$, la limite d'une fonction polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
• En $\pm\infty$, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur *(ne pas oublier de simplifier le quotient des termes de plus haut degré avant de déterminer la limite).*

b) Asymptotes

• Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à C_f.
• Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ alors la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à C_f en $\pm\infty$.

c) Position relative de deux courbes

Pour déterminer la position relative entre deux courbes C_f et C_g, on étudie le signe de $f(x) - g(x)$ (méthode aussi valable pour les asymptotes horizontales) :
• si $f(x) - g(x) \geqslant 0$ pour tout x d'un intervalle I, alors C_f est située au dessus de C_g sur I.
• si $f(x) - g(x) \leqslant 0$ pour tout x d'un intervalle I, alors C_f est située en dessous de C_g sur I.

d) Dérivation

• **Dérivées des fonctions usuelles :**

$f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$	$f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$	$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$
$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$	$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$	$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{x^3}$	$f(x) = \frac{1}{x^3} \Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{x^4}$	$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$	$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$	

• **Opérations sur les fonctions dérivables :**

Fonction	**Fonction dérivée**
$f + g$	$f' + g'$
$k\,f \quad (k$ réel$)$	$k\,f'$
$f\,g$	$f'\,g + f\,g'$

Fonction	**Fonction dérivée**
f^2	$2\,f'\,f$
$\frac{1}{f}$	$-\frac{f'}{f^2}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'\,g - f\,g'}{g^2}$

e) Tangente

• Si f est dérivable en a alors une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est : $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ (le coefficient directeur de la tangente est égale à la valeur de la dérivée)
• Pour déterminer les abscisses des éventuels points de C_f où la tangente admet un coefficient directeur égal à m, il suffit de résoudre l'équation $f'(x) = m$.

3) Fonctions logarithme népérien et exponentielle

a) Existence

• $\ln x$ n'existe que si $x > 0$.
• e^x existe pour tout réel x.

► *Exemple :*
La fonction f définie par $f(x) = \ln(x - 1)$ n'est définie que sur $]1\,; +\infty[$ car il faut que $x - 1$ soit strictement positif.

b) Lien entre $\ln x$ et e^x

- $y = e^x \Leftrightarrow \ln y = x$
- $\ln(e^x) = x$; $e^{\ln x} = x$ (pour $x > 0$)

c) Valeurs particulières

- $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$
- $e^0 = 1$; $e^1 = e$; $e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

d) Propriétés algébriques

Si $a > 0$ et $b > 0$:
$\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$; $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
Pour tout entier n, $\ln(a^n) = n \ln a$; $\ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$

Pour tous réels a et b :
$e^a \times e^b = e^{a+b}$; $\dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$; $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(e^a)^n = e^{an}$

▶ *Exemples :*
Si $x > 0$, $\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = -\ln(x^2) = -2\ln x$
Pour tout x, $(e^{-x})^2 \times e^{3x} = e^{-2x} \times e^{3x} = e^x$

e) Signe de $\ln x$ et de e^x

- **Signe de $\ln x$:**
  Si $0 < x < 1$ alors $\ln x$ est strictement négatif.
  Si $x > 1$ alors $\ln x$ est strictement positif.
  $\ln 1 = 0$.
- **Signe de e^x :** pour tout réel x, e^x est strictement positif.

f) Équations et inéquations

- Si $a > 0$ et $b > 0$:
  $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$; $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$; $\ln a \leqslant \ln b \Leftrightarrow a \leqslant b$
- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$; $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$; $e^a \leqslant e^b \Leftrightarrow a \leqslant b$
- $\ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$; $\ln x < a \Leftrightarrow 0 < x < e^a$; $\ln x > a \Leftrightarrow x > e^a$
- Si $a > 0$: $e^x = a \Leftrightarrow x = \ln a$; $e^x < a \Leftrightarrow x < \ln a$; $e^x > a \Leftrightarrow x > \ln a$

▶ *Remarque :*
Pour les équations et inéquations avec logarithme, ne pas oublier de commencer par définir les conditions d'existence (les expressions contenues dans un logarithme doivent être strictement positives).

▶ *Exemples d'équations et d'inéquations :*

• $\ln x + \ln 2 = 5$. Condition d'existence : $x > 0$.
Avec cette condition :
$\ln x + \ln 2 = 5 \Leftrightarrow \ln(2x) = 5 \Leftrightarrow 2x = e^5 \Leftrightarrow x = \dfrac{e^5}{2}$. $S = \left\{\dfrac{e^5}{2}\right\}$

• $\ln(x+2) \leqslant 1$. Condition d'existence : $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$.
Avec cette condition :
$\ln(x+2) \leqslant 1 \Leftrightarrow x + 2 \leqslant e \Leftrightarrow x \leqslant e - 2$. $S =]-2; e-2]$

• $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 2X - 3 = 0$ avec $X = e^x$.
$\Delta = 16$; $X = -1$ ou $X = 3$.

D'où, $\mathrm{e}^x = -1$ (impossible) ou $\mathrm{e}^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$. $\quad S = \{\ln 3\}$

• $\mathrm{e}^x < 5\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow \mathrm{e}^x < \dfrac{5}{\mathrm{e}^x} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} < 5$ (car $\mathrm{e}^x > 0$) $\Leftrightarrow 2x < \ln 5 \Leftrightarrow x < \dfrac{\ln 5}{2}$. $\quad S = \left]-\infty; \dfrac{\ln 5}{2}\right[$.

g) Limites

Situation en $+\infty$:

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

• Pour tout entier $n > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0 \quad ; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{\ln x} = +\infty$

(on dit que x^n est plus fort que $\ln x$ en $+\infty$)

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$

• Pour tout entier $n > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0$

(on dit que e^x est plus fort que x^n en $+\infty$: on en déduit que e^x est aussi plus fort que $\ln x$ en $+\infty$)

Méthode générale en cas de FI en $+\infty$: Mettre le plus fort en facteur en haut et en bas.

▶ *Exemples :*

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x - x = \lim\limits_{x \to +\infty} x \left(\dfrac{\ln x}{x} - 1 \right) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} 3\mathrm{e}^x - x^2 = \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x \left(3 - \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} \right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} \times \dfrac{1}{(1 + \frac{1}{\mathrm{e}^x})} = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = 1$

Situation en 0 :

• $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

• Pour tout entier $n > 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n \times \ln x = 0$

Méthode générale en cas de FI en 0 avec un logarithme : on essaie de faire apparaître $x^n \times \ln x$.

▶ *Exemple :*

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} + \ln x = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} (1 + x \ln x) = +\infty \quad$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$

Situation en $-\infty$:

• $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$

• Pour tout entier $n > 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n \times \mathrm{e}^x = 0$

Méthode générale en cas de FI en $-\infty$ avec un exponentiel : on essaie de faire apparaître $x^n \times e^x$.

▶ *Exemple :* $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x \left(x^2 + 1 \right) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 \mathrm{e}^x + e^x = 0$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$

h) Dérivées

• $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} \quad ; \quad (\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ $(u > 0)$

• $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x \quad ; \quad (\mathrm{e}^u)' = u' \mathrm{e}^u$

▶ *Exemples :*

$\left[\ln(x^2 + 1)\right]' = \dfrac{2x}{x^2 + 1} \quad ; \quad \left[\mathrm{e}^{-x}\right]' = -\mathrm{e}^{-x}$

i) Puissances

• Pour tous réels a et b avec $a > 0$: $a^b = \mathrm{e}^{b \ln a} \quad ; \quad \ln\left(a^b\right) = b \ln a$

• Pour tout réel $k > 0$: $x^\alpha = k \Leftrightarrow x = k^{\frac{1}{\alpha}}$ (dans $]0\,; +\infty[$)

▶ *Exemples :*

• $2^x = 5 \Leftrightarrow \ln\left(2^x\right) = \ln 5 \Leftrightarrow x \ln 2 = \ln 5 \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 5}{\ln 2}$

• $x^{0,9}=10 \Leftrightarrow x=10^{\frac{1}{0,9}}=\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{0,9}\times\ln 10\right)}$
• Pour tout x, $(3^x)'=\left(\mathrm{e}^{x\ln 3}\right)'=\ln 3\times\mathrm{e}^{x\ln 3}=\ln 3\times 3^x$.

4) Primitives

• F est une primitive de f sur un intervalle I si F est dérivable sur I et si pour tout x de I, $F'(x)=f(x)$.
• Si F_0 est une primitive de f sur intervalle I alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme $F(x)=F_0(x)+C$ où C est une constante réelle.
• Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

• **Primitives des fonctions usuelles :** *(F représente une primitive de f)*

$f(x)=a\Rightarrow F(x)=ax$	$f(x)=x\Rightarrow F(x)=\dfrac{x^2}{2}$
$f(x)=x^2\Rightarrow F(x)=\dfrac{x^3}{3}$	$f(x)=x^3\Rightarrow F(x)=\dfrac{x^4}{4}$
$f(x)=\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow F(x)=-\dfrac{1}{x}$	$f(x)=\dfrac{1}{x^3}\Rightarrow F(x)=-\dfrac{1}{2x^2}$
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\Rightarrow F(x)=2\sqrt{x}$	
$f(x)=\dfrac{1}{x}\Rightarrow F(x)=\ln x$	$f(x)=\mathrm{e}^x\Rightarrow F(x)=\mathrm{e}^x$
$f(x)=\sin x\Rightarrow F(x)=-\cos x$	$f(x)=\cos x\Rightarrow F(x)=\sin x$
$f(x)=\sin(ax+b)\Rightarrow F(x)=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$f(x)=\cos(ax+b)\Rightarrow F(x)=\frac{1}{a}\sin(ax+b)$

• **Formules générales :**

forme de f	une primitive de f	exemples
$U'U$	$\dfrac{U^2}{2}$	$f(x)=\cos x\times\sin x\Rightarrow F(x)=\dfrac{(\sin x)^2}{2}$
$U'U^2$	$\dfrac{U^3}{3}$	$f(x)=4(4x+1)^2\Rightarrow F(x)=\dfrac{(4x+1)^3}{3}$
$\dfrac{U'}{U^2}$ $(U(x)\neq 0))$	$\dfrac{-1}{U}$	$f(x)=\dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2}\Rightarrow F(x)=\dfrac{-1}{x^3+1}$
$\dfrac{U'}{U^3}$ $(U(x)\neq 0))$	$\dfrac{-1}{2U^2}$	$f(x)=\dfrac{7}{(7x+1)^3}\Rightarrow F(x)=\dfrac{-1}{2(7x+1)^2}$
$\dfrac{U'}{U}$ $(U(x)>0))$	$\ln U$	$f(x)=\dfrac{4}{(4x+1)}\Rightarrow F(x)=\ln(4x+1)$
$U'\mathrm{e}^U$	e^U	$f(x)=-\mathrm{e}^{-x}\Rightarrow F(x)=\mathrm{e}^{-x}$

• **Recherche pratique d'une primitive :**
Pour les fonctions usuelles, on utilise directement les formules.
Pour autres fonctions, il faut d'abord identifier la forme qui ressemble le plus à la fonction. Si on a la forme exacte, on utilise directement la formule correspondante. Dans le cas contraire, on écrit la forme exacte qu'il faudrait pour la fonction f et on rectifie en multipliant par le coefficient adéquat.
▶ *Exemple :* Soit f définie par $f(x)=e^{3x+4}$. On pense à la forme $U'e^U$ (dont une primitive est e^U) .
On écrit que $f(x)=\dfrac{1}{3}\times\underbrace{3\,e^{3x+4}}_{\text{forme exacte}}$ Une primitive de f est donc F définie par $F(x)=\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x+4}$.

5) Calcul intégral

Soit f une fonction continue sur un intervalle I :
• Pour tous a et b de I :
$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$ où F est une primitive de f sur I.

▶ *Exemple :*
$$\int_0^{\ln 2}3\,\mathrm{e}^{3x}\,dx=\left[\mathrm{e}^{3x}\right]_0^{\ln 2}=\mathrm{e}^{3\ln 2}-\mathrm{e}^0=\mathrm{e}^{\ln(2^3)}-1=\mathrm{e}^{\ln(8)}-1=8-1=7.$$

Propriétés de l'intégrale :
Pour f et g continues sur un intervalle I et pour a, b et c de I :
- $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$ *(Relation de Chasles)*
- $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ *(linéarité de l'intégrale)*
- Pour tout réel k, $\displaystyle\int_a^b (kf)(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ *(linéarité de l'intégrale)*
- Si $a \leqslant b$ et si $f(x) \geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$
- Si $a \leqslant b$ et si $f(x) \leqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$
- Si $a \leqslant b$ et si $f(x) \leqslant g(x)$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle
Si f est continue sur $[a,b]$, la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est égale à $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Calculs d'aires
f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$.
- Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes de f et g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\displaystyle\int_a^b g(x) - f(x)\,dx$ en **unités d'aire**.
(« intégrale de la plus grande moins la plus petite »)
- Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geqslant 0$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ en **unités d'aire**.
- Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant 0$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\displaystyle -\int_a^b f(x)\,dx$ en **unités d'aire**.

► *Remarques :*
- Pour avoir l'aire en cm^2, il faut multiplier le résultat en unités d'aire par :
(la valeur en cm d'une unité sur l'axe des abscisses) × (la valeur en cm d'une unité sur l'axe des ordonnées).
- Pour déterminer l'aire entre deux courbes, il faut d'abord connaitre leur position relative sur l'intervalle en question afin de savoir quelle est « la plus grande » et « la plus petite ».

6) Suites

a) Suites géométriques

On passe d'un terme au terme suivant en multipliant toujours par le même nombre q appelé raison de la suite.
- Pour tout n : $U_{n+1} = q \times U_n$; $U_n = q^n \times U_0$; $U_n = q^{n-p} \times U_p$
- Si pour tout n, $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ = constante alors (U_n) est une suite géométrique de raison égale à la constante.
- $\displaystyle U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n = U_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = \text{1er terme} \times \frac{1-q^{\text{nb de termes}}}{1-q}$
(pour $q \neq 1$)

► *Exemple :*
Soit (U_n) la suite géométrique de 1er terme $U_0 = 5$ et de raison $b = 2$.
$U_4 = q^4 \times U_0 = 2^4 \times 5 = 80$; $U_{10} = q^{10} \times U_0 = 2^{10} \times 5 = 5120$
Pour tout n, $U_n = q^n \times U_0 = 5 \times 2^n$.
$\displaystyle U_0 + U_1 + \cdots + U_8 = 5 \times \frac{1-2^9}{1-2} = 2555.$

b) Limite de q^n avec $q > 0$

• si $0 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
• si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
• si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.

▶ *Exemples :*
• $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{3}\right)^n = +\infty$ car $\sqrt{3} > 1$.
• $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 3$ car $0 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$.

c) Détermination du plus petit entier n tel que $q^n \geqslant a$ (si $q > 1$) ou tel que $q^n \leqslant a$ (si $0 < q < 1$)

Méthode : on isole q^n et on utilise que $\ln(q^n) = n \ln q$.

▶ *Exemples :*
• Recherche du plus petit entier n tel que $2^n \geqslant 3000$:
$2^n \geqslant 3000 \Leftrightarrow \ln(2^n) \geqslant \ln(3000) \Leftrightarrow n\ln 2 \geqslant \ln 3000 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln 3000}{\ln 2}$ (car $\ln 2 > 0$).
Or $\dfrac{\ln 3000}{\ln 2} \approx 11,55$. Le plus petit entier qui convient est donc 12.
• Recherche du plus petit entier n tel que $0,8^n \leqslant 0,01$:
$0,8^n \leqslant 0,01 \Leftrightarrow \ln(0,8^n) \leqslant \ln(0,01) \Leftrightarrow n\ln 0,8 \leqslant \ln 0,01 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,8}$ (car $\ln 0,8 < 0$).
Or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,8} \approx 20,64$. Le plus petit entier qui convient est donc 21.

7) Équations différentielles

a) Équations différentielles de la forme $y' + ay = b$

• Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sont les fonctions f définies par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax}$.

• Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sont les fonctions f définies par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax} + \dfrac{b}{a}$.

▶ *Exemple :* : Résolution de $y' + 4y = 8$ ($a = 4$; $b = 8$)
• Les solutions sont définies par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax} + \dfrac{b}{a} = k\,\mathrm{e}^{-4x} + \dfrac{8}{4} = k\,\mathrm{e}^{-4x} + 2$.
• Recherche de la solution particulière telle que $f(0) = 1$:
Cela revient à déterminer k tel que $f(0) = 5 \Leftrightarrow k\,\mathrm{e}^0 + 2 = 5 \Leftrightarrow k = 3$.
La solution particulière cherchée est donc définie par $f(x) = 3\,\mathrm{e}^{-4x} + 2$.

b) Équations différentielles de la forme $y'' + \omega^2 y = 0$

Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions f définies par $f(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$.

▶ *Exemple :* : Résolution de $y'' + 4y = 0$ (on a $\omega^2 = 4$: on peut prendre $\omega = 2$)
• Les solutions sont définies par $f(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$.
• Recherche de la solution particulière telle que $f(0) = \sqrt{3}$ et $f'(0) = 2$:
$f(0) = \sqrt{3} \Leftrightarrow A\cos 0 + B\sin 0 = \sqrt{3} \Leftrightarrow A = \sqrt{3}$.
Pour tout x, on a $f'(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)$.
$f'(0) = 2 \Leftrightarrow -2A\sin 0 + 2B\cos 0 = 2 \Leftrightarrow 2B = 2 \Leftrightarrow B = 1$.
La solution cherchée est définie par $f(x) = \sqrt{3}\cos(2x) + \sin(2x)$.

8) Complexes

a) Forme algébrique - Calculs dans $\mathbb{C}$

• Tout complexe s'écrit de façon unique sous la **forme algébrique** $z = a + ib$ (a et b réels) avec $i^2 = -1$.
• a est la **partie réelle** et b est la **partie imaginaire** .
• Le conjugué de z est $\overline{z} = a - ib$.
• Pour écrire un quotient de complexes sous forme algébrique :
– si le dénominateur est de la forme ib, on multiplie en haut et en bas par i ;
– si le dénominateur est de la forme $a + ib$, on multiplie en haut et en bas par le conjugué du dénominateur.

▶ *Exemples de calculs dans* $\mathbb{C}$ *:*

• $3i(3 + 4i) = 3i + 12i^2 = -12 + 3i$

• $(1 + 2i)^2 = 1^2 + 2 \times 1 \times 2i + (2i)^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$

• $\dfrac{3}{i} = \dfrac{3}{i} \times \dfrac{i}{i} = \dfrac{3i}{-1} = -3i$

• $\dfrac{2+i}{3+2i} = \dfrac{(2+i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \dfrac{6-4i+3i-2i^2}{3^2+2^2} = \dfrac{8-i}{13}$

• Résolution de l'équation $\dfrac{1+iz}{-1+3i} = z$: $\dfrac{1+iz}{-1+3i} = z \Leftrightarrow 1 + iz = (-1+3i)z$

$\Leftrightarrow 1 = (-1+2i)z \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{-1+2i} = \dfrac{1}{-1+2i} \times \dfrac{-1-2i}{-1-2i} = \dfrac{-1-2i}{1^2+2^2} = \dfrac{-1-2i}{5}$.

Propriétés sur les conjugués :
$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$; $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $(z' \neq 0)$.

b) Forme trigonométrique - Module et arguments

Pour $z = a + ib$ (a et b réels) :
• Le **module** de z est : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
• Si $z \neq 0$, tout réel θ tel que $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{\text{partie rélle}}{\text{module}} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{\text{partie imaginaire}}{\text{module}} \end{cases}$
est un **argument** de z. On note $arg\, z = \theta + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

• Pour tout θ, on pose $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
• $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$; $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$; $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$
• $|e^{i\theta}| = 1$; $\overline{(e^{i\theta})} = e^{-i\theta}$; $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$
• Si un complexe non nul admet r comme module et θ comme argument alors $z = r\,e^{i\theta}$ (**forme trigonométrique** ou **forme exponentielle**)
• Si $z = r\,e^{i\theta}$ avec $r > 0$ alors $|z| = r$ et $arg\, z = \theta + 2k\pi$.
• $r\,e^{i\theta} = r'\,e^{i\theta'}$ (avec $r > 0$ et $r' > 0$) $\Leftrightarrow r = r'$ et $\theta = \theta' + 2k\pi$.

▶ *Exemple de passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique :*

Soit $z = \sqrt{3} + i$. $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$. $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6}$. D'où $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

▶ *Exemple de passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique :*

$z = 4e^{i\frac{\pi}{4}} = 4\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = 4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$.

▶ *Autres exemples classiques d'utilisation de la forme trigonométrique :*

• *Calcul de* $(1-\mathrm{i})^{12}$. Il est hors de question de faire le calcul sous forme algébrique.

On détermine d'abord la forme trigonométrique de $z = 1 - \mathrm{i}$:

$$|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}. \left\{ \begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}. \text{ D'où } z = \sqrt{2}\, e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$$

$$(1-\mathrm{i})^{12} = z^{12} = \left(\sqrt{2}\right)^{12} e^{-\mathrm{i}\frac{12\pi}{4}} = 64\, e^{-\mathrm{i}3\pi} = 64\left(\cos(-3\pi) + i\sin(-3\pi)\right) = -64$$

• *Soit* $z_1 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$ *et* $z_2 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$. *Calculer la forme trigonométrique de* z_1, z_2 *et* $\dfrac{z_1}{z_2}$. *En déduire la valeur de* $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

En calculant le module et un argument de z_1 et z_2, on montre que $z_1 = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et que $z_1 = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$. On en déduit que $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}} = e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$. Ainsi $\dfrac{\pi}{12}$ est un argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Or, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}} = \dfrac{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)}{4} = \dfrac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+\mathrm{i}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}$.

$$\text{Donc, } \left\{ \begin{array}{l} \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\text{partie rélle de } \frac{z_1}{z_2}}{\text{module de } \frac{z_1}{z_2}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\text{partie imaginaire de } \frac{z_1}{z_2}}{\text{module de } \frac{z_1}{z_2}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{array} \right.$$

c) Complexes et géométrie

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

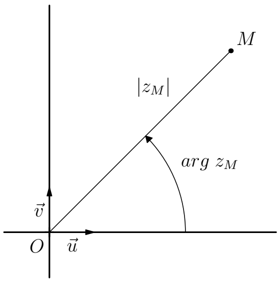
• L'affixe du point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est $z_M = x + \mathrm{i}y$.

• L'affixe du milieu I de $[AB]$ est $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

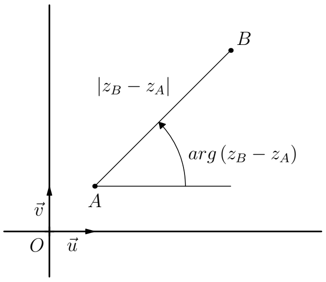
• L'affixe du vecteur $\overrightarrow{V}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est $z_{\overrightarrow{V}} = x + iy$.

• $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$; $z_{\overrightarrow{U}+\overrightarrow{V}} = z_{\overrightarrow{U}} + z_{\overrightarrow{V}}$; $z_{k\overrightarrow{U}} = k \cdot z_{\overrightarrow{U}}$

• Si M est d'affixe z alors $|z_M| = OM$ et $arg\ z_M = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right)$ $(z \neq 0)$.



• Si A et B sont deux points distincts d'affixes z_A et z_B :
la distance AB est égale à $|z_B - z_A|$ et $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}\right) = arg\,(z_B - z_A)$.



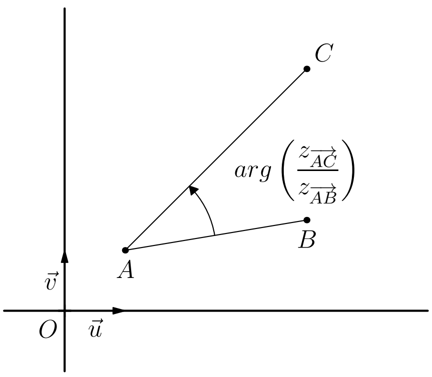
• Pour déterminer la nature d'un triangle ABC, il suffit de calculer ses côtés avec $AB = |z_B - z_A|$,...
• Pour montrer que deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ sont colinéaires, il suffit de montrer qu'il existe un réel k tel que $z_{\overrightarrow{V}} = k \cdot z_{\overrightarrow{U}}$.
• Pour montrer que trois points A, B et C sont alignés, il suffit de montrer qu'il existe un réel k tel que $z_{\overrightarrow{AC}} = k \cdot z_{\overrightarrow{AB}}$.
• Pour montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles, il suffit de montrer qu'il existe un réel k tel que $z_{\overrightarrow{CD}} = k \cdot z_{\overrightarrow{AB}}$.

• L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - z_A| = r$ $(r > 0)$ est le cercle de centre A et de rayon r (car $|z - z_A| = r \Leftrightarrow AM = r$) .
• L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - z_A| = |z - z_B|$ $(z_A \neq z_B)$ est la médiatrice du segment $[AB]$ (car $|z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$).

► *Exemple :* Soit A et B les points d'affixe $z_A = 2 + 2\text{i}$ et $z_B = 4\text{i}$.
La distance OA est égale à $|z_A| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$.
La distance OB est égale à $|z_B| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$.
La distance AB est égale à $|z_B - z_A| = |4\text{i} - (2 + 2\text{i})| = |-2 + 2\text{i}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$.
On en déduit que le triangle OAB est rectangle et isocèle en A car $AO = AB$ et $AO^2 + AB^2 = OB^2$.
Si on veut une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA}\right)$, il suffit de déterminer un argument de z_A :

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

L'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right)$ (avec $A \neq B$ et $A \neq C$)



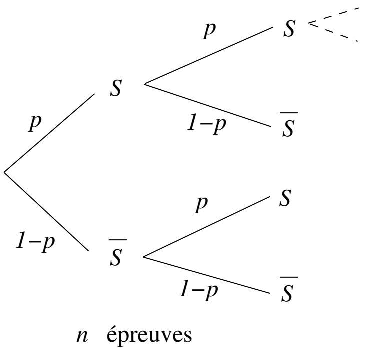
9) Probabilités

a) Loi binomiale

• On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles (contraires l'une de l'autre).
• On appelle **schéma de Bernoulli** toute répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

► *Exemple :* Lancer un dé avec pour issues contraires ≪ obtenir un 6 ≫ et ≪ ne pas obtenir un 6 ≫ est une *épreuve* de Bernoulli. Lancer le dé 10 fois est un *schéma* de Bernoulli (on répète l'épreuve de Bernoulli) .

► **Remarques :**
• Les deux issues contraires d'une *épreuve* de Bernoulli se note en général S (pour ≪ succès≪) et $\overline{S}$. La probabilité que S soit réalisé est noté en général p (la probabilité de $\overline{S}$ est alors $(1 - p)$).
• Pour s'assurer que l'on a bien affaire à un *schéma* de Bernoulli, il faut vérifier que chaque expérience prise isolément n'admet que deux issues possibles (contraires l'une de l'autre), que le ≪ succès≪ a toujours la même probabilité d'apparaître et qu'il y a bien indépendance entre chacune des *épreuves* de Bernoulli successives.



Étant donné une épreuve de Bernoulli où la probabilité d'obtenir un succès S est p et le schéma de Bernoulli consistant à répéter n fois de manière indépendante cette épreuve.

Si note X la variable aléatoire qui à chaque issue possible du schéma de Bernoulli associe le nombre de fois où est apparu un succès S, la loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale** de paramètres n et p et est notée $\mathcal{B}(n,p)$.

- **Probabilité d'obtenir k succès ($0 \leqslant k \leqslant n$)** :
$p(X=k) = \binom{n}{k}\, p^k\, (1-p)^{n-k}$
(Le coefficient $\binom{n}{k}$ s'obtient avec la calculatrice : n `nCr` k)
- **Espérance de X** : $E(X) = np$
- **Variance de X** : $V(X) = np(1-p)$
- **Écart-type de X** : $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

► *Exemple :*
Si on lance 7 fois de suite un dé et si on note X le nombre de 6 obtenus, on répète 7 fois l'épreuve de Bernoulli : « obtenir un 6 (probabilité : $\frac{1}{6}$) - ne pas obtenir un 6 ».

X suit donc la loi binomiale de paramètres $n=7$ et $p=\frac{1}{6}$.

La probabilité d'obtenir exactement trois fois un « 6 » est égale à : $\binom{7}{3}\ \left(\frac{1}{6}\right)^3\ \left(\frac{5}{6}\right)^4$.

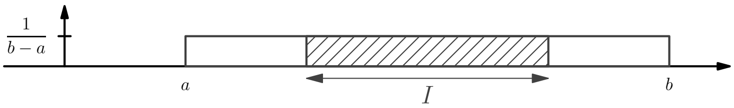
La probabilité de n'obtenir que des « 6 » est égale à : $\left(\frac{1}{6}\right)^7$

La probabilité de n'obtenir aucun « 6 » est égale à : $\left(\frac{5}{6}\right)^7$

L'espérance de X (nombre moyen de « 6 » que l'on peut espérer obtenir en répétant un grand nombre de fois l'expérience aléatoire) est égale à $np = \frac{7}{6}$.

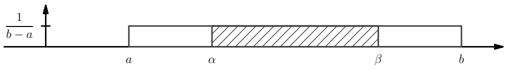
b) Loi uniforme

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;\,b]$ lorsque pour tout intervalle I, inclus dans $[a\,;\,b]$, la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire du rectangle de base I et de hauteur $\dfrac{1}{b-a}$.



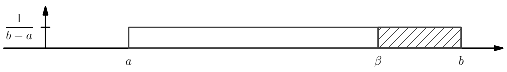
- Si une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;\,b]$ alors pour tous réels α et β inclus dans $[a\,;\,b]$, on a :

$p\,(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$

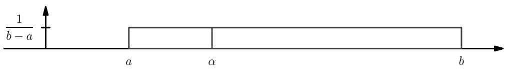


$p\,(X \leqslant \alpha) = p\,(a \leqslant X \leqslant \alpha) = \dfrac{\alpha-a}{b-a}$

$p\,(X \geqslant \beta) = p\,(\beta \leqslant X \leqslant b) = \dfrac{b-\beta}{b-a}$



$p\,(X = \alpha) = 0$

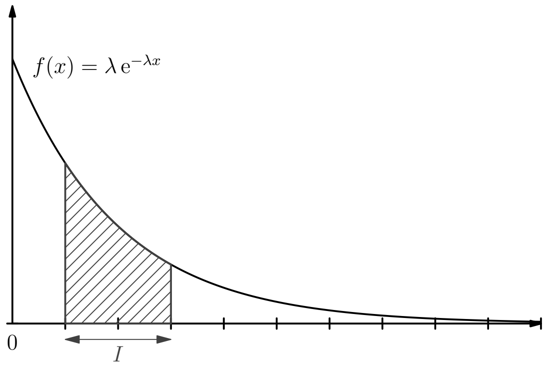


(on a les mêmes résultats avec des inégalités strictes)

- Si une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;\,b]$ alors **l'espérance** de X est égale à $\dfrac{a+b}{2}$.

c) Loi exponentielle

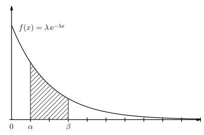
On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre** λ sur $[0\,;\,+\infty[$ lorsque pour tout intervalle I, inclus dans $[0\,;\,+\infty[$, la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire sous la courbe sur I de la fonction f définie par $f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$



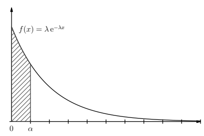
On a donc $p\,(X \in I) = \displaystyle\int_{x\in I} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

• Si une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre** λ sur $[0\,;\,+\infty[$ alors pour tous réels α et β inclus dans $[0\,;\,+\infty[$, on a :

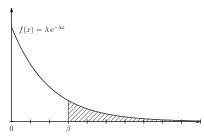
$$p\,(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \int_\alpha^\beta \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_\alpha^\beta$$



$$p\,(X \leqslant \alpha) = p\,(0 \leqslant X \leqslant \alpha) = \int_0^\alpha \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^\alpha$$



$$p\,(X \geqslant \beta) = 1 - p\,(0 \leqslant X \leqslant \beta) = 1 - \int_0^\beta \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^\beta$$



(on a les mêmes résultats avec des inégalités strictes)

• Si une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre** λ sur $[0\,;\,+\infty[$ alors **l'espérance** de X est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$.

► *Exemple :* La durée de vie X (en heures) d'un composant électronique suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0006$ sur $[0, +\infty[$.

La probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie inférieure à 1000 heures est donnée par :

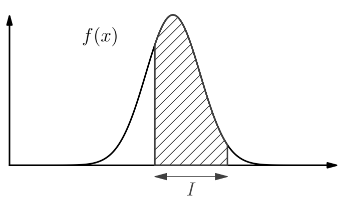
$p(X < 1000) = \displaystyle\int_0^{1000} 0,0006e^{-0,0006x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-0,0006x}\right]_0^{1000} = 1 - e^{-0,6}$.

La probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 500 heures est donnée par :

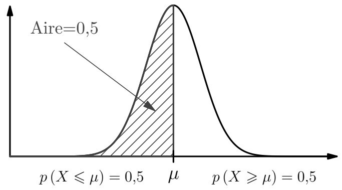
$p(X > 500) = 1 - \displaystyle\int_0^{500} 0,0006e^{-0,0006x}\,\mathrm{d}x = 1 - \left[-e^{-0,0006x}\right]_0^{500} = e^{-0,3}$.

d) Loi normale

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi normale d'espérance** μ **et d'écart-type** σ lorsque pour tout intervalle I la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire sous la courbe sur I de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-0,5\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$.

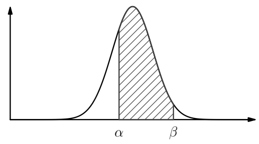


▶ **Remarque :** L'aire totale sous la courbe est égale à 1 (on dit que f est une densité de probabilité) et la courbe est symétrique par rapport à l'espérance μ. On a donc la situation suivante :

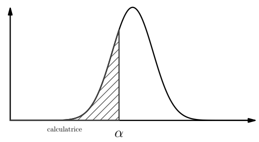


• Si une variable aléatoire X suit la **loi normale d'espérance** μ **et d'écart-type** σ alors pour tous réels α et β, on a :

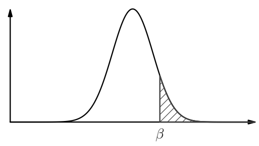
$p(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) =$
TI : DISTR (2nd+VARS) ; `normalcdf` $(\alpha, \beta, \mu, \sigma)$
CASIO : Menu STAT ; DIST ; NORM ; NCD avec
Lower : α ; Upper : β ; σ : σ ; μ : μ



$p(X \leqslant \alpha) =$
TI : `normalcdf` $(-10^{99}, \alpha, \mu, \sigma)$
CASIO : NCD avec
Lower : -10^{99} ; Upper : α ; σ : σ ; μ : μ



$p(X \geqslant \beta) =$
TI : `normalcdf` $(\beta, 10^{99}, \mu, \sigma)$
CASIO : NCD avec
Lower : β ; Upper : 10^{99} ; σ : σ ; μ : μ



• **Valeurs remarquables :**
$p(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0,68$
$p(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0,95$
$p(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0,997$

▶ *Exemple 1:* (pour tester sa calculatrice)
Si X suit la loi normale d'espérance $\mu = 58$ et d'écart-type $\sigma = 6$, on doit avoir :
$p(52 \leqslant X \leqslant 64) \approx 0,682689$; $p(X \leqslant 55) \approx 0,308538$; $p(X \geqslant 62) \approx 0,252493$

▶ *Exemple 2:* Le diamètre X des barres métalliques sortant d'un atelier suit la loi normale d'espérance 12 mm (le diamètre attendu) et d'écart-type 0,08 mm. Un client refuse d'acheter des tubes dont le diamètre ne serait pas compris entre 11,9 mm et 12,2 mm. On cherche à déterminer le pourcentage de tubes acceptés par le client.
$p(11,9 \leqslant X \leqslant 12,2) \approx 0,888$, donc 88,8% des tubes sont acceptés par le client.

▶ *Exemple 3:* Une variable aléatoire suivant une loi normale est telle que $p(X < 2) = 0,067$ et $p(X < 3) = 0,159$.
On peut en déduire que $p(X > 2) = 1 - p(X \leqslant 2) = 0,933$ et $p(2 < X < 3) = p(X < 3) - p(X < 2) = 0,092$.

10) Échantillonnage

a) Intervalle de fluctuation à 95%

Étant donné une population dans laquelle la proportion connue d'un certain caractère est p. Si on prélève, avec remise, un échantillon de taille n dans cette population alors il y a 95% de chance (dans certaines conditions) que la proportion f du caractère au sein de cet échantillon appartienne à l'intervalle :

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \,;\, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

Cet intervalle est appelé **intervalle de fluctuation à 95%** de l'échantillon associé à la proportion p.

b) Prise de décision à partir d'un intervalle de fluctuation

Étant donné une population dans laquelle **on suppose que la proportion d'un certain caractère est** p. Si on prélève, avec remise, un échantillon de taille n dans cette population et si la **fréquence réelle observée** f du caractère dans cet échantillon **est comprise dans l'intervalle de fluctuation** alors on dit qu'**on accepte au seuil de 95% l'hypothèse que la proportion réelle du caractère dans la population est bien** p (dans le cas contraire, on dit qu'on rejette l'hypothèse).

► *Exemple :* Un candidat pense que 52% des électeurs lui sont favorables. On prélève avec remise un échantillon de 500 électeurs : 47% des électeurs interrogés de cet échantillon se déclarent favorable au candidat en question.
L'intervalle de fluctuation de l'échantillon associé à la proportion de 52% est $[0,476\,;\,0,564]$ car :
$0,52 - 1,96\sqrt{\dfrac{0,52 \times 0,48}{500}} \approx 0,476$ et $0,52 + 1,96\sqrt{\dfrac{0,52 \times 0,48}{500}} \approx 0,564$.
$0,47$ étant en dehors de l'intervalle de fluctuation, on peut rejeter au seuil de 95% l'hypothèse du candidat selon laquelle 52% des électeurs lui sont favorables.

c) Estimation par un intervalle de confiance

On cherche à connaitre une estimation de la proportion p inconnue d'un certain caractère au sein d'une population. Pour cela, on prélève avec remise un échantillon de taille n au sein de la population et on note f la proportion observée du caractère au sein de l'échantillon. Il y alors 95% de chance (dans certaines conditions) que la proportion p du caractère au sein de la population totale soit comprise dans l'intervalle :

$$\left[f - 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\,;\, f + 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$$

Cet intervalle est appelé **intervalle de confiance à 95%** associé à la proportion f.

► *Exemple :* Un sondage réalisé sur un échantillon de 1000 personnes attribue à un candidat un score de 18%.
L'intervalle de confiance à 95% associé à cette proportion observée de 18% dans l'échantillon est $[15,6\%\,;\,20,3\%]$ car :
$0,18 - 1,96\sqrt{\dfrac{0,18 \times 0,82}{1000}} \approx 0,156$ et $0,18 + 1,96\sqrt{\dfrac{0,18 \times 0,82}{1000}} \approx 0,203$.