PRIMITIVES ET INTÉGRALES

1. PRIMITIVES D'UNE FONCTION

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur I.

On dit que F est une primitive de f sur l'intervalle I, si et seulement si F est dérivable sur I et pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$.

EXEMPLE

La fonction $F: x \mapsto x^2$ est une primitive de la fonction $f: x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction $G: x \mapsto x^2 + 1$ est aussi une primitive de cette même fonction f.

PROPRIÉTÉ

Si F est une primitive de f sur I, alors les autres primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $F + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

REMARQUE

Une fonction continue ayant une infinité de primitives, il ne faut pas dire **la** primitive de f mais **une** primitive de f.

EXEMPLE

Les primitives de la fonction $f: x \mapsto 2x$ sont les fonctions $F: x \mapsto x^2 + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

PROPRIÉTÉ

Toute fonction **continue** sur un intervalle I admet des primitives sur I.

PROPRIÉTÉS

Primitives des fonctions usuelles :

Fonction f	**Primitives** F	**Ensemble de validité**
0	k	$\mathbb{R}$
a	$ax+k$	$\mathbb{R}$
$x^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+k$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N};\ n>1)$	$-\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}+k$	$\mathbb{R}-\{0\}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x+k$	$]0;+\infty[$
e^x	e^x+k	$\mathbb{R}$

PROPRIÉTÉS

Si f et g sont deux fonctions définies sur I et admettant respectivement F et G comme primitives sur I et k un réel quelconque.

- $F+G$ est une primitive de la fonction $f+g$ sur I.
- kF est une primitive de la fonction kf sur I.

PROPRIÉTÉS

Primitives et fonctions composées

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Fonction f	**Primitives** F	**Condition**
$u'u^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}+k$	
$\frac{u'}{u}$	$\ln u+k$	si $u(x)>0$
$\frac{u'}{u^n} \ (n \in \mathbb{N};\ n>1)$	$-\frac{1}{(n-1)\,u^{n-1}}+k$	si $u(x)\neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+k$	si $u(x)>0$
$u'e^u$	e^u+k	

EXEMPLE

La fonction $x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$ admet comme primitives les fonctions de la forme $x \mapsto \ln\left(x^2+1\right)+k$ sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ (forme $\frac{u'}{u}$).

2. INTÉGRALES

DÉFINITION

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$.

L'intégrale de a à b de f est le nombre réel noté $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ défini par :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

REMARQUES

- L'intégrale ne dépend pas de la primitive de f choisie.
  En effet si G est une autre primitive de f, on a $G = F + k$ donc :
  $G(b) - G(a) = F(b) + k - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$
- Dans l'expression $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, x est une variable « muette ». C'est à dire que l'on ne change pas l'expression si on remplace x par une autre lettre. En pratique, on emploie souvent la lettre t notamment lorsque la lettre x est employée par ailleurs.

NOTATIONS

On note souvent : $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$.

On a avec cette notation :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b.$$

EXEMPLE

La fonction F définie par $F(x) = \frac{x^3}{3}$ est une primitive de la fonction carré.

On a donc :

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}.$$

THÉORÈME (INTÉGRALE FONCTION DE SA BORNE SUPÉRIEURE)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$; la fonction définie sur I par :

$$x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est la primitive de f qui s'annule pour $x = a$.

DÉMONSTRATION

Soit F une primitive (quelconque) de f. Posons $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$

donc :

$\Phi'(x) = F'(x) = f(x)$.

Ce qui prouve que Φ est aussi une primitive de f.

De plus $\Phi(a) = F(a) - F(a) = 0$.

REMARQUE

Notez bien la position du x en borne supérieure de l'intégrale.

EXEMPLE

La fonction définie sur $[0;+\infty[$ $x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ (on peut aussi écrire $\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$) est la primitive de la fonction inverse qui s'annule pour $x = 1$. C'est donc la fonction logarithme népérien :

$\ln(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

PROPRIÉTÉ

Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et $c \in [a;b]$.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

PROPRIÉTÉ

Linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

PROPRIÉTÉ

Comparaison d'intégrales

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ telles que $f \geqslant g$ sur $[a;b]$.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

REMARQUE

En particulier, en prenant pour g la fonction nulle on obtient si $f(x) \geqslant 0$ sur $[a;b]$:

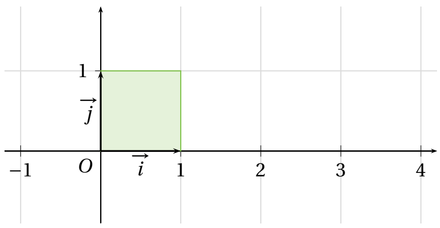
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

3. INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

DÉFINITION

Le plan P est rapporté à un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On appelle **unité d'aire (u.a.)** l'aire d'un rectangle (qui est un carré si le repère est orthonormé) dont les côtés mesurent $||\vec{i}||$ et $||\vec{j}||$.



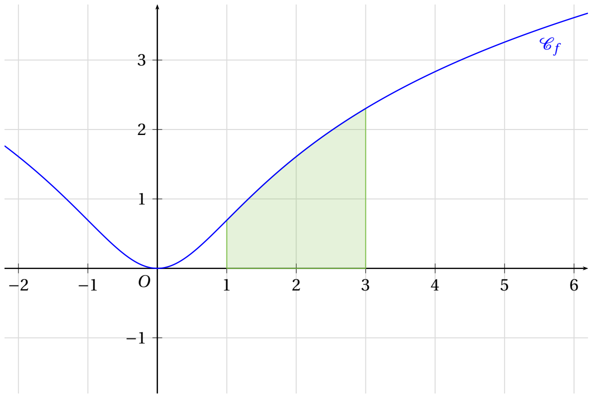
Unité d'aire dans le cas d'un repère orthonormé

PROPRIÉTÉ

Si f est une fonction continue et **positive** sur $[a;b]$, alors l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire, en unités d'aire, de la surface délimitée par :

- la courbe C_f,
- l'axe des abscisses,
- les droites (verticales) d'équations $x = a$ et $x = b$.

EXEMPLE



L'aire colorée ci-dessus est égale (en unités d'aire) à $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

REMARQUES

- Si f est négative sur $[a;b]$, la propriété précédente appliquée à la fonction $-f$ montre que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'**opposé** de l'aire délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
- Si le signe de f varie sur $[a;b]$, on découpe $[a;b]$ en sous-intervalles sur lesquels f garde un signe constant.

PROPRIÉTÉ

Si f et g sont des fonctions continues et telles que $f \leqslant g$ sur $[a;b]$, alors l'aire de la surface délimitée par :

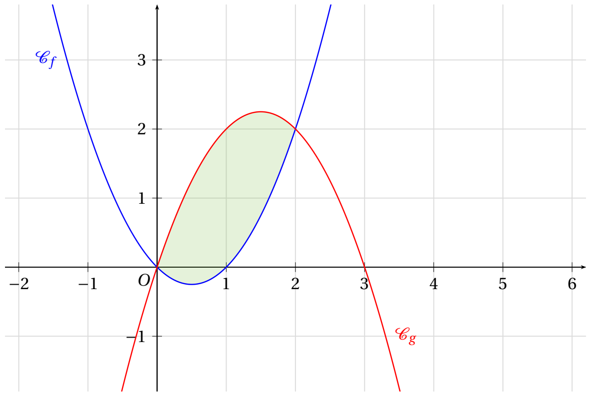
- la courbe C_f,
- la courbe C_g,
- les droites (verticales) d'équations $x = a$ et $x = b$.

est égale (en unités d'aire) à :

$$A = \int_a^b \left(g(x) - f(x)\right)\mathrm{d}x.$$

EXEMPLE

f et g définies par $f(x) = x^2 - x$ et $g(x) = 3x - x^2$ sont représentées par les paraboles ci-dessous :



L'aire colorée est égale (en unités d'aire) à :

$$A = \int_0^2 \left(g(x) - f(x)\right) \mathrm{d}x = \int_0^2 \left(4x - 2x^2\right) \mathrm{d}x = \left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{8}{3}\text{u.a.}$$