Nombres complexes

I - Introduction - Résolution d'équations algébriques

Soit le trinôme du second degré $P(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 3x + 5$.

Le discriminant de P est : $\Delta = 9 - 10 = -1 < 0$, donc P n'a pas de racine réelle.

Imaginons un instant que l'on puisse néanmoins écrire $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-1}$, et donc les formules donnant les racines de P (qui ne sont donc sûrement pas réelles !) :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -3 + \sqrt{-1}\ ; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -3 - \sqrt{-1}$$

$$\begin{aligned}
\text{Alors,} \quad P(x_1) = P(-3 + \sqrt{-1}) &= \frac{1}{2}\Big(-3 + \sqrt{-1}\Big)^2 + 3\Big(-3 + \sqrt{-1}\Big) + 5 \\
&= \frac{1}{2}\Big(9 - 6\sqrt{-1} + \big(\sqrt{-1}\big)^2\Big) - 9 + 3\sqrt{-1} + 5 \\
&= \frac{1}{2}\Big(9 - 6\sqrt{-1} + (-1)\Big) - 4 + 3\sqrt{-1} \qquad (\text{car } \sqrt{-1}^2 = -1\,!) \\
&= 0
\end{aligned}$$

On vérifie de même que $P(x_2) = 0$, et ainsi, ce trinôme du second degré admet bien deux racines distinctes, mais celles-ci **ne sont pas réelles**.

Le nombre $\sqrt{-1}$ n'existe pas : ce n'est pas un nombre réel. Cardan, mathématicien du XVIème siècle appelait ce type de nombres des nombres "impossible". Plus tard, Descartes leur donna le nom de nombre "imaginaire", qui sont devenus aujourd'hui des nombres complexes.

II - Le plan complexe

Théorème *(admis)*
Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes**, *qui possède les propriétés suivantes :*

- *$\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$*
- *il existe un nombre complexe, noté i tel que $i^2 = -1$.*
- *tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + iy$, où x et y sont des nombres réels.*

Ex : $z = 3 + 2i \in \mathbb{C}$; $z_2 = -5 \in \mathbb{R}$, donc $z_2 \in \mathbb{C}$; $z_3 = \sqrt{7} - 6i \in \mathbb{C}$; ...

Définition *L'écriture $z = x + iy$, où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ s'appelle la* **forme algébrique** *du nombre complexe z.*
x est la partie réelle de z, notée $\mathcal{R}e(z)$, et y est la partie imaginaire de z, notée $\mathcal{I}m(z)$,

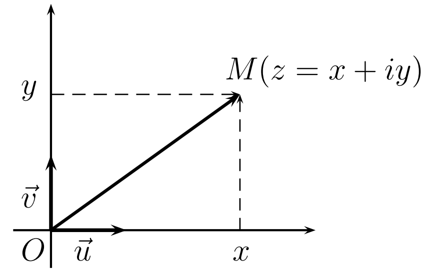
D'après le premier théorème et l'unicité de l'écriture sous forme algébrique, on a donc :

Corollaire *Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire : soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, avec a, b, a' et b' quatre nombres réels, alors,*

$$z = z' \iff \Big(a = a' \quad et \quad b = b'\Big)$$

Définition ***Plan complexe***

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ direct.
A tout nombre complexe $z = x+iy$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$, on associe le point M de coordonnées $M(x;y)$.
On dit que z est l'affixe du point M, ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$; et que le point M, ou le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est l'image de z.



Définition *Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses, que l'on appelle donc* **axe réel**.
Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle, $z = 0+iy = iy$ est appelé un nombre **imaginaire pur**. *Les images de ces nombres sont les points de l'axe des ordonnées, que l'on appelle donc* **axe imaginaire (pur)**.

Exercice 1 Placer les points A, B et C d'affixe respectif : $z_A = -1-2i$, $z_B = 4-i$ et $z_C = \sqrt{2}+\dfrac{3}{2}i$.
Déterminer les longueurs OA, OB et OC et AB.

III - Opérations sur les nombres complexes

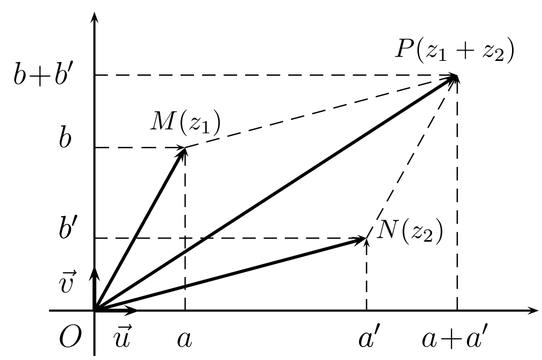
Les règles de calcul sur les nombres réels s'étendent aux nombres complexes.

Exercice 2 Exprimer sous forme algébrique les nombres complexes :

- $(2+3i)+(-1+6i)$ • $(5+i)-(3-2i)$ • $(1+i)(3-2i)$ • $(4+i)(-5+3i)$
- $(2-i)^2$ • $(x+iy)(x'+iy')$ • $(x+iy)^2$ • $(2-3i)(2+3i)$ • $(a+ib)(a-ib)$

Propriété *Soit $z_1 = a+ib$ et $z_2 = a'+ib'$ deux nombres complexes, avec a, b, a' et b' quatre réels, et M et N leur image respective dans le plan complexe.*
Alors $z = z_1+z_2 = (a+a')+i(b+b')$ a pour image le point P tel que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$.

De même, le vecteur $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$ a pour affixe le complexe $z_{\overrightarrow{MN}} = z_2 - z_1$.



Propriété *Soit deux points A et B d'affixe z_A et z_B, alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_b - z_A$.*
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe z et z', alors le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour affixe $z+z'$.
De plus, si $k\in\mathbb{R}$, le vecteur $k\vec{u}$ a pour affixe kz.

Exercice 3 Les points A, B et C ont pour affixe respective $-2+i$, $3+3i$, $1+\dfrac{11}{5}i$.

a) Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
b) En déduire que les points A, B et C sont alignés.
c) Placer les points A, B et C.

Exercice 4 Les points A, B et C ont pour affixe respective $1+\frac{1}{2}i$, $\frac{3}{2}+2i$ et $-1-\frac{11}{2}i$.

Montrer que les points A, B et C sont alignés.

Exercice 5 On considère dans le plan complexe les points A, B, C et D d'affixe $z_A=3+i$, $z_B=2-2i$, $z_C=2i$ et $z_D=1+5i$.

a) Faire une figure

b) Montrer de deux façons différentes que $ABCD$ est un parallélogramme.

Propriété *(Inverse d'un nombre complexe)*

Tout nombre complexe non nul z admet un inverse, noté $\frac{1}{z}$.

<u>Démonstration :</u> Soit $z=x+iy$ un nombre complexe non nul, c'est-à-dire $x\neq 0$ et $y\neq 0$.

Alors, $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+iy}=\dfrac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}=\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}=\dfrac{x}{x^2+y^2}-i\dfrac{y}{x^2+y^2}$ avec $x^2+y^2\neq 0$

Exercice 6 Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes :

- $\dfrac{1}{\sqrt{3}+2i}$
- $\dfrac{1+4i}{1-\sqrt{2}i}$
- $\left(2+i\sqrt{3}\right)\left(5-i\right)+\left(\dfrac{1}{2}+3i\right)^2$
- i^3
- $\dfrac{1}{i}$
- i^4
- i^5
- i^6
- Exprimer en fonction de $n\in\mathbb{Z}$, $z_n=i^n$

Exercice 7 Soit $z_1=-1+2i$ et $z_2=1-i$. Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes :

- $z_1^2-2z_2$
- $z_1z_2^2$
- $\dfrac{z_1}{z_2}$
- $\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}$
- $\dfrac{1}{z_1^2}+\dfrac{1}{z_2^2}$

Exercice 8

1. Donner la forme algébrique de : i^{12} ; i^{2012} ; i^{37} ; i^{-13}
2. Calculer la somme : $S=1+i+i^2+\cdots+i^{2014}$
3. On pose $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer $1+j+j^2$.

IV - Conjugué d'un nombre complexe

Définition *Soit $z=x+iy$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$, un nombre complexe. On appelle* **conjugué** *de z, noté $\overline{z}$, le nombre complexe $\overline{z}=x-iy$.*

Propriété *Dans le plan complexe, si le point M a pour affixe z, alors l'image M' de $\overline{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.*

<u>Ex :</u> • $z=3+2i$, alors $\overline{z}=3-2i$. • $\overline{3-\frac{1}{2}i}=3+\frac{1}{2}i$ $\quad\overline{-5}=-5$ $\quad\overline{3i}=-3i$

Propriété

- $\overline{\overline{z}}=z$
- $z\overline{z}=x^2+y^2$
- $\overline{zz'}=\overline{z}\,\overline{z'}$
- $\overline{z^n}=\overline{z}^n$
- $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$
- *si* $z\neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z}}$
- *si* $z'\neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- $z+\overline{z}=2\mathcal{R}e(z)$ *et donc, z imaginaire pur* $\iff \mathcal{R}e(z)=0\iff z=-\overline{z}$
- $z-\overline{z}=2i\mathcal{I}m(z)$, *et donc,* $z\in\mathbb{R}\iff\mathcal{I}m(z)=0\iff z=\overline{z}$

Exercice 9 Soit les nombres complexes : $z_1=\dfrac{3-i}{5+7i}$ et $z_2=\dfrac{3+i}{5-7i}$.

Vérifier que $z_1 = \overline{z_2}$, et en déduire que $z_1 + z_2$ est réel et que $z_1 - z_2$ est imaginaire pur.

Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1 - z_2$.

Exercice 10 Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$.

a) Montrer que pour tout complexe z, $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.
b) Vérifier que $1 + i$ est une racine de P, et en déduire une autre racine complexe de P.

Exercice 11 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe tels que $Z = z^2 + \overline{z}$ soit réel.

Exercice 12 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

a) $5\overline{z} = 4 - i$ b) $(1 + i)\overline{z} + 1 - i = 0$ c) $3\overline{z} - 2iz = 5 - 3i$

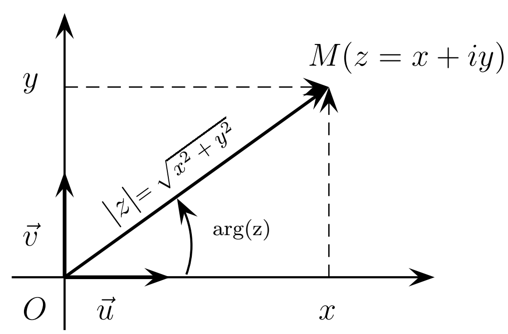
Exercice 13 Montrer que l'équation $z^2 - 3\overline{z} + 2 = 0$ admet quatre solutions dans $\mathbb{C}$.

V - Module et argument d'un nombre complexe

Définition *Soit dans le plan complexe un point M d'affixe $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.*

Alors, $OM = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$. Ce nombre, **réel et positif**, *s'appelle* **le module** *du nombre complexe z, et est noté $|z| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$.*

On appelle **argument** *du nombre complexe non nul z, noté $\arg(z)$, toute mesure en radians de l'angle orienté : $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$.*

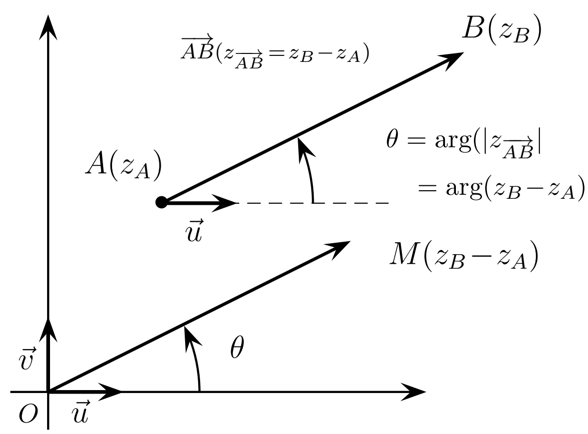


Remarque : Un nombre complexe non nul z a une infinité d'arguments : si θ est un de ces arguments, alors tous les autres sont de la forme $\theta + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On note $\arg(z) = \theta$ (modulo 2π), ou $\arg(z) = \theta$ $[2\pi]$, ou encore, pour simplifier (mais alors par abus de langage), $\arg(z) = \theta$.

Propriété *Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$, alors $\overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$ et donc,*

- $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_a|$
- $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) = arg(z_{\overrightarrow{AB}}) = arg(z_B - z_A)$.



Exercice 14 Dans le plan complexe, A, B et C sont les points d'affixes :

$$z_A = 1 + i \ , \ z_B = 4 + 5i \ , \ z_C = 5 - 2i \ .$$

1. Montrer que $AB = AC$, puis que $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.
2. Déterminer l'affixe du point K tel que le quadrilatère $ABKC$ soit un rectangle.
3. a) Déterminer l'affixe du point G tel que le quadrilatère $AGBC$ soit un parallélogramme.
   b) Vérifier que B est le milieu du segment $[GK]$.

Propriété *Pour tout nombres complexes z et z' :*

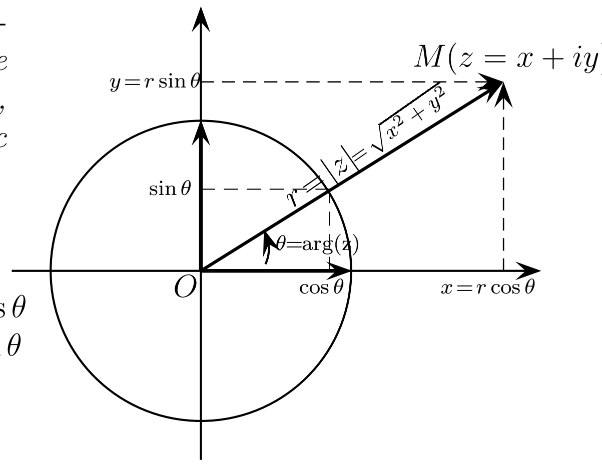
- *si* $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$ *et* $y \in \mathbb{R}$, $z\overline{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$
- $|-z| = |z|$ • $|\overline{z}| = |z|$
- $|zz'| = |z|\,|z'|$ • $|z^n| = |z|^n$ • $\dfrac{|z|}{|z'|} = \left|\dfrac{z}{z'}\right|$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ *(inégalité triangulaire)*

Exercice 15 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

• $|z - 6i| = 3$ • $|z + 3 - 2i| < 2$ • $|z + 2| = |z - 3i + 1|$ • $|2 - iz| = |z + 5|$ • $\left|\dfrac{z + 2i}{z + 1 - 2i}\right| > 1$

VI - Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition *Dans le plan complexe un point M peut-être repéré par ses coordonnées cartésienne $(x;y)$, ou son affixe complexe $z = x + iy$, ou par ses coordonnées polaires $(r;\theta)$, avec $r = OM$ et $\theta = (\vec{u};\overrightarrow{OM})$.*



On a les relations :

$$\left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{r}\ ,\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right.$$

L'affixe z du point M s'écrit alors,

$$z = r\big(\cos\theta + i\sin\theta\big)$$

Cette écriture est la **forme trigonométrique** *de z.*

Exercice 16 Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

• $z_1 = 3$ • $z_2 = -4$ • $z_3 = 2i$ • $z_4 = -1 + i$ • $z_5 = -\sqrt{3} + i$

• $z_6 = -17$ • $z_7 = -6\sqrt{3}+6i$ • $z_8 = 5i$ • $z_9 = \sqrt{6}+i\sqrt{2}$.

VII - Exponentielle complexe

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$. Comme les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, f l'est aussi, et,

$$f'(\theta) = -\sin(\theta) + i\cos\theta = i(i\sin\theta + \cos\theta) = if(\theta)$$

Comme de plus, $f(0) = \cos 0 + i\sin 0 = 1$, on en déduit que f est définie de manière unique par l'expression $f(\theta) = e^{i\theta}$.

Propriété *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.*
Ainsi, tout complexe z s'écrit sous la forme exponentielle complexe :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

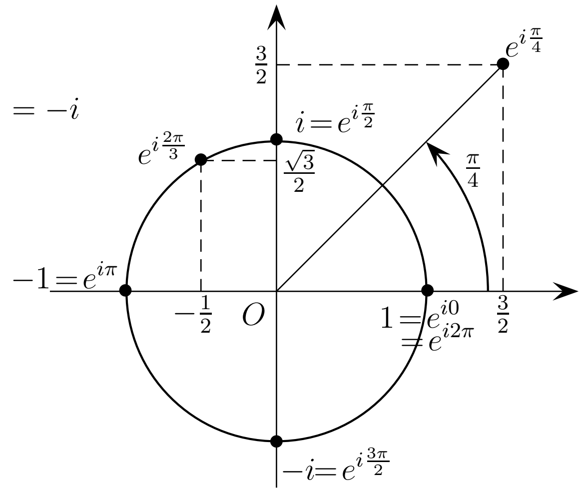
où, $r = |z|$ et $\theta = arg(z)$.

Exemples :

- $e^{i0}=e^{i2\pi}=1$ • $e^{i\pi}=-1$ • $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$ • $e^{i\frac{3\pi}{2}}=-i$

- $$\begin{aligned} e^{i\frac{2\pi}{3}} &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \frac{3}{2}+\frac{3}{2}i &= \frac{3\sqrt{2}}{2}\Big(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\Big) \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$



Exercice 17 Placer dans le plan complexe et écrire sous formes trigonométrique et algébrique les nombres complexes :

- $3e^{-i\frac{\pi}{2}}$ • $\sqrt{2}e^{3i\frac{\pi}{4}}$ • $6e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ • $5e^{i\frac{5\pi}{3}}$ • $2e^{i\frac{\pi}{4}}\,e^{-i\frac{3\pi}{2}}$ • $\dfrac{3e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$

Exercice 18 Ecrire sous forme trigonométrique et exponentielle les nombres complexes :

- 5 • $4+4i$ • $\dfrac{3}{2}i$ • $\dfrac{2}{1-i}$ • $\sqrt{3}-i$ • $\left(\sqrt{3}-i\right)^2$ • $\left(\sqrt{3}-i\right)^3$

Propriété *Pour tous réels θ et θ', et tout entier naturel n,*

- $|e^{i\theta}|=1$, *et* $arg(e^{i\theta})=\theta$
- $e^{i\theta}e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$; $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}$; $\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$
- $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$ *(Formule de Moivre), c'est-à-dire,* $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$
- $e^{i\theta}=e^{i\theta'} \iff \theta=\theta'\ [2\pi]$

Corollaire *Pour tous nombres complexes z et z',*

- $arg(zz')=arg(z)+arg(z')$
- $arg(z^n)=n\,arg(z)$
- $arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=arg(z)-arg(z')$

Démonstration : Soit $z=re^{i\theta}$, $r=|z|$ et $\theta=\arg(z)$, et $z'=r'e^{i\theta'}$, $r'=|z'|$ et $\theta'=\arg(z')$, alors, $zz'=rr'e^{i(\theta+\theta')}$, et donc, $|zz'|=rr'=|z||z'|$, et $\arg(zz')=\theta+\theta'=\arg(z)+\arg(z')$.

De même pour la puissance : $z^n=\left(re^{i\theta}\right)^n=r^n\left(e^{i\theta}\right)^n=r^ne^{in\theta}$, et donc, $|z^n|=r^n=|z|^n$ et $\arg(z^n)=n\theta=n\arg(z)$

Exercice 19 On donne $z_1=e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2=3e^{-i\frac{\pi}{3}}$, et $z_3=\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

Donner sous la forme exponentielle puis algébrique les complexes : $z_1z_2z_3$, $\dfrac{z_1}{z_2z_3}$, z_2^2, z_3^6.

Exercice 20 Simplifier l'expression, où $\theta\in\mathbb{R}$, $\left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2$.

Etait-ce prévisible sans calcul ?

Exercice 21 Ecrire le nombre complexe $(\sqrt{3}-i)^{10}$ sous forme algébrique.

Exercice 22 Calculer le module et un argument des complexes suivants, puis les écrire sous formes trigonométrique et exponentielle :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2(1+i)} \qquad\qquad z_2 = \frac{5(-1+i)}{\sqrt{3}+i}$$

Exercice 23

a) Ecrire sous forme trigonométrique les complexes $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 1 - i$, et $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

b) Déterminer la forme algébrique de Z, et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 24

a) Ecrire sous forme trigonométrique les complexes $z_1 = -1 - i$, $z_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, et $Z = z_1 z_2$.

b) Déterminer la forme algébrique de Z. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$.

Exercice 25 *(Formules trigonométriques)* Soit θ et θ' deux réels quelconques.

En exprimant de deux manières différentes le complexe $e^{i\theta}e^{i\theta'}$, exprimer $\cos(\theta+\theta')$ et $\sin(\theta+\theta')$ en fonction des cosinus et sinus de θ et θ'.

Exprimer de la même façon $\sin(2\theta)$ et $\cos(2\theta)$.

Exercice 26 En utilisant la notation exponentielle complexe, retrouver en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ les valeurs de :

- $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ • $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ • $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ • $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$
- $\cos(x+\pi)$ • $\sin(x+\pi)$ • $\cos(\pi - x)$ • $\sin(\pi - x)$

Corollaire *Soit $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ alors* $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

<u>Démonstration:</u>

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) &= \left(\overrightarrow{AB};\vec{u}\right) + \left(\vec{u};\overrightarrow{CD}\right) = -\left(\vec{u};\overrightarrow{AB}\right) + \left(\vec{u};\overrightarrow{CD}\right) \\ &= -\arg(z_B - z_A) + \arg(z_D - z_C) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\end{aligned}$$

□

Exercice 27 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

- $\arg(z) = \dfrac{\pi}{6}$ • $|z-3| = |z+2i|$ • $|z+1-2i| < \sqrt{5}$ • $\left|\overline{z} + \dfrac{i}{2}\right| = 4$
- $\arg(z+i) = \pi$ • $\arg\left(\dfrac{1}{iz}\right) = \pi$ • $\arg\left(\dfrac{z+1}{z-2i}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

VIII - Équations du second degré

Propriété *Soit a un nombre réel. Les solutions de l'équation $z^2 = a$ sont appelées racines carrées de a dans $\mathbb{C}$, avec*

- *si $a \geq 0$, alors $z = \sqrt{a}$ ou $z = -\sqrt{a}$ (deux racines réelles)*
- *si $a < 0$, alors $z = i\sqrt{-a}$ ou $z = -i\sqrt{-a}$ (deux racines complexes, imaginaires pures)*

<u>Démonstration :</u> • Si $a \geq 0$, alors $z^2 = a \iff (z - \sqrt{a})(z + \sqrt{a}) = 0$, d'où les racines de l'équation.

• Si $a < 0$, $z^2 = a \iff z^2 - i^2(-a) = z^2 - i^2(\sqrt{-a})^2 = 0 \iff (z - i\sqrt{-a})(z + i\sqrt{-a}) = 0$, d'où les racines complexes.

Ex : Les racines carrées de 2 dans $\mathbb{C}$ sont $\sqrt{2}$ et $\sqrt{-2}$, qui sont réelles ; les racines carrées de -4 dans $\mathbb{C}$ sont $i\sqrt{4}=2i$ et $-i\sqrt{4}=-2i$.

Propriété *L'équation $az^2+bz+c=0$, où $a\neq 0$, b et c sont trois réels, de discriminant $\Delta=b^2-4ac$ admet :*

- *si $\Delta=0$, une solution réelle double $z=-\dfrac{b}{2a}$*
- *si $\Delta>0$, deux solutions réelles distinctes $z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.*
- *si $\Delta<0$, deux solutions complexes conjuguées :*

$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \textit{et} \ , \ z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas, le trinôme du second degré se factorise selon (avec éventuellement $z_1=z_2$) : $az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$.

Exercice 28 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- $z^2+z+1=0$ • $z^2-3z+18=0$ • $z^2+9z-4=0$ • $-z^2+(1+\sqrt{3})z-\sqrt{3}=0$

Exercice 29 On considère l'équation $z^2-2\cos(\theta)z+1=0$, où θ est un réel donné dans $[0;2\pi[$.

a) Vérifier que le discriminant de cette équation est $\Delta=-4\sin^2(\theta)$.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation proposée, en discutant suivant les valeurs de θ, en donnant les solutions sous formes exponentielle.

Exercice 30 Ecrire sous forme exponentielle les solutions de : $z^2-2z\sin^2\alpha+\sin^2\alpha=0$.

Exercice 31

a) Donner sous forme exponentielle les solutions de l'équation : $z^2+z+1=0$.

b) Soit α un réel donné. Factoriser l'expression : $z^2-e^{2i\alpha}$.

c) En déduire les solutions de l'équation : $z^4+z^2+1=0$.

Exercice 32 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4+4z^2-21=0$.

Exercice 33 On considère l'équation du second degré (E) : $z^2+(1+i\sqrt{3})z-1=0$.

1. Déterminer le discriminant Δ de cette équation. Écrire Δ sous forme exponentielle.
2. Donner un nombre complexe δ tel que $\delta^2=\Delta$. Écrire δ sous forme algébrique.
3. Vérifier que les formules usuelles du second degré, $z_1=\dfrac{-b-\delta}{2a}$ et son conjugué $z_2=\overline{z_1}$ donnent bien deux solutions de (E).

Exercice 34 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-\overline{z}+\dfrac{1}{4}=0$.

Exercice 35 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-3\overline{z}+2=0$.

Exercice 36 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4+4z^2-21=0$.

Exercice 37 On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=z^4-4z^3+4z^2-4z+3$.

a) Montrer qu'il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que, pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z^2+1)Q(z)$.

b) En déduire toutes les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme P.

Exercice 38 Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i$.

1. Calculer $P(i)$.
2. Trouver deux nombres réels p et q tels que $P(z) = (z-i)(z^2+pz+q)$.
3. Déterminer alors toutes les racines du polynôme P.

Exercice 39 Soit le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = 3z^3 + (1+6i)z^2 + 2(8+i)z + 32i$.

a) Vérifier que $z_0 = -2i$ est une racine de P.

b) En déduire une factorisation de P, et déterminer alors toutes les racines de P.

Exercice 40

1. x est un nombre réel. Ecrire la forme algébrique et la forme exponentielle de $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\right)e^{ix}$.
2. Utiliser la question précédente pour résoudre dans $]-\pi;\pi[$ l'équation $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}$.

Propriété *(Equations d'un cercle) Soit $\mathcal{C}_0$ le cercle trigonométrique et $\mathcal{C}_R$ le cercle de rayon R centré à l'origine, et $\mathcal{C}_{R,\Omega}$ le cercle de rayon R centré en Ω d'affixe ω, alors :*

- $M(z) \in \mathcal{C} \iff OM = 1 \iff |z| = 1 \iff z = e^{i\theta}$
- $M(z) \in \mathcal{C}_R \iff OM = R \iff |z| = R \iff z = Re^{i\theta}$
- $M(z) \in \mathcal{C}_{R,\Omega} \iff \Omega M = R \iff |z-\omega| = R \iff z-\omega = Re^{i\theta} \iff z = \omega + Re^{i\theta}$

Remarque : En écrivant $z = x+iy$ et $\omega = \omega_x + i\omega_y$, on retrouve l'équation cartésienne d'un cercle

$M(x;y) \in \mathcal{C}_{R,\Omega} \iff |z-\omega| = R \iff |(x-\omega_x) + i(y-\omega_y)|^2 = R^2 \iff \underline{(x-\omega_x)^2 + (y-\omega_y)^2 = R^2}$

Exercice 41

a) Déterminer l'équation du cercle de rayon 3 et de centre $\Omega(3+2i)$.

b) Quel est l'ensemble des point $M(x;y)$ tels que $x^2+y^2-6x+4y-12=0$.

c) Quel est l'ensemble des point $M(x;y)$ tels que $x^2+y^2+4x-2y+11=0$.

Exercice 42 Soit p et q deux nombres réels.

a) Factoriser $e^{i\frac{p+q}{2}}$ dans la somme $e^{ip} + e^{iq}$.

b) En déduire une factorisation de $\cos(p)+\cos(q)$ et de $\sin(p)+\sin(q)$.

c) Résoudre dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ l'équation : $\cos(x)+\cos(3x)=0$.