

La calculatrice est autorisée.

Exercice 1 ROC (2 points)**Question de cours**

Soient u et v des fonctions dérivables, dont la dérivée est continue sur un intervalle $I = [a, b]$.

Démontrer la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt$$

Application : déterminer une primitive de la fonction logarithme népérien.

Exercice 2 QCM (4 points)

Une seule réponse exacte par question. La trouver rapporte 1 point, ne pas répondre 0 et se tromper -0,5...

Aucune justification n'est demandée dans ce QCM.

1. Parmi ces quatre intégrales, une seule est égale à 0,69. Laquelle ?

☐ $I = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$

☐ $J = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{1+e^x} dx$

☐ $K = \int_0^1 (x+0,19) dx$

☐ $L(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$, pour $x > 0$

2. Parmi ces quatre intégrales, une seule est non nulle, laquelle ?

☐ $I = \int_0^{2\pi} \sin x dx$

☐ $J = \int_{-1}^1 \frac{x \sin(x^2)}{1+x^2} dx$

☐ $K = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx$

☐ $L = \int_{-1}^1 x e^x dx$

3. La fonction F définie sur tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ est :

☐ croissante sur $\mathbb{R}$

☐ décroissante sur $\mathbb{R}$

☐ croissante sur $\mathbb{R}_-$ puis décroissante sur $\mathbb{R}_+$

☐ décroissante sur $\mathbb{R}_-$ puis croissante sur $\mathbb{R}_+$

4. Question avec prise d'initiative

Dans un repère orthogonal, l'aire du domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq 0 \text{ et } 0 \leq y \leq e^x\}$, en unité d'aire, est :

☐ e

☐ 1

☐ e^{-1}

☐ $e - 1$

Exercice 3 (4 points)

On considère les intégrales I et J suivantes :

$$I = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x + 4} dx$$

1. Calculer $I - 3J$ et $I + J$.
2. En déduire la valeur exacte de I et de J .

Exercice 4 (10 points)

Le but de cet exercice est de démontrer l'égalité suivante :

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) par : $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

Note : $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$

Par exemple : $5! = 120$

On remarquera que :

$$(n+1)! = n! \times (n+1)$$

Par exemple, on a :

$$u_6 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = \frac{1957}{720} \simeq 2,718 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

1. Dans cette question, on montre que la suite (u_n) converge.
 - a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
 - b. Démontrer, par récurrence, que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$k! \geq 2^{k-1}$$

Puis que la suite (u_n) est majorée par 3.

- c. En déduire que la suite (u_n) converge.
2. Dans cette question, nous allons calculer la limite de la suite (u_n) .

Pour cela, on considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (I_n) définie par :

$$I_0 = \int_0^1 e^{1-x} dx \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*$$

- a. Calculer I_0 .
- b. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{1-x} dx$$

En déduire que la suite (I_n) converge vers 0.

- c. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$$

- d. Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n + u_n = e$$

- e. En déduire que la suite (u_n) converge vers e .