4. Équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants avec second membre variable

On s'intéresse, dans ce paragraphe, aux équations différentielles (E) du type :

$$(E) : y' - ay = f \quad \text{où } a \in \mathbb{R} \text{ et } \boldsymbol{f} \textbf{ est une fonction}$$

> 4.1. Théorème
>
> Soient a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I.
>
> Soit (E) l'équation différentielle : $\quad y' - ay = f$
>
> Soit (E_0) l'équation différentielle sans second membre associée :
>
> $$y' = ay$$
>
> Soit p une solution particulière de (E), sur I : $\quad p' - ap = f$ sur I
>
> > La question générale de l'existence d'une solution particulière est hors programme (voir §9)
>
> Alors les solutions y de (E), sur I, s'obtiennent en ajoutant les solutions de (E_0) avec p :
>
> $$y(x) = C\,\mathbf{e}^{ax} + p$$

Démonstration :

On a les équivalences suivantes :

$$y \text{ solution de } (E) \text{ sur } I$$

$$y' - ay = f \text{ sur } I$$

$$y' - ay = p' - ap \text{ sur } I$$

$$(y - p)' = a(y - p) \text{ sur } I$$

$$y - p \text{ solution de } (E_0) \text{ sur } I$$

$$y(x) = C\,\mathbf{e}^{ax} + p(x) \text{ pour tout } x \in I$$

> Le théorème 4.1. n'est pas explicitement au programme. Dans la pratique, les exercices demandent que les équivalences ci-contre soient redémontrées.

Exemple : résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle (E) :

$$y' + y = x^2 + x$$

- **Résolution de l'équation sans second membre associée**

$$(E_0) : y' + y = 0.$$

D'après le théorème 2.1 : $\quad y(x) = C\,\mathbf{e}^{-x}$ où $C \in \mathbb{R}$

- **Recherche d'une solution particulière $\boldsymbol{p}$** (souvent de la même nature que le second membre)

Soit p une fonction polynôme du second degré :

$$p(x) = a\,x^2 + bx + c$$

On a alors, pour tout réel x : $\quad p'(x) = 2ax + b$

Déterminons les coefficients a, b et c afin que p soit solution de (E) :

$$2ax + b + a\,x^2 + bx + c = x^2 + x$$

$$a\,x^2 + (b + 2a)x + c + b = x^2 + x$$

$$a = 1 \qquad 2a + b = 1 \qquad b + c = 0$$

$$a = 1 \qquad b = -1 \qquad c = 1$$

Une solution particulière p est donc définie par :

$$p(x) = x^2 - x + 1$$

On a donc : $\quad p'(x) + p(x) = x^2 + x$

- **On montre qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f - p$ est solution de (E_0)** :

  On a les équivalences suivantes :

$$f \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f(x) + f'(x) = x^2 + x \quad \text{pour tout réel } x$$

$$f(x) + f'(x) = p'(x) + p(x) \quad \text{pour tout réel } x$$

$$(f - p)' + (f - p) = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$f - p \text{ solution de } (E_0)$$

$$f(x) - p(x) = C\,\mathbf{e}^{-x} \quad \text{pour tout réel } x$$

$$f(x) = C\,\mathbf{e}^{-x} + x^2 - x + 1 \text{ pour tout réel } x$$

RETENIR CE PRINCIPE :

Les fonctions solutions f de l'équation (E) avec second membre sont la somme des solutions de l'équation sans second membre associée (E_0) et d'une solution particulière de (E). Ceci sera une règle générale pour les équations différentielles **linéaires**.

5. Théorème de "Cauchy-Lipschitz" pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1, à coefficients constants et avec second membre

5.1. Théorème

Soient a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I.

Soit (E) l'équation différentielle : $\quad y' - ay = f$

On suppose que l'on connaît une solution particulière p de (E).

Soient x_0 et y_0 deux réels.

Il existe une unique solution, sur I, au problème différentiel $(P)\begin{cases} (E) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$.

La condition $y(x_0) = y_0$ s'appelle "condition initiale".

Démonstration :

On a vu que les solutions de (E) sur I sont les fonctions de la forme :

$$y(x) = C\,\mathbf{e}^{ax} + p(x) \quad \text{pour tout } x \in I$$

La condition initiale $y(x_0) = y_0$ s'écrit : $\quad C\,\mathbf{e}^{ax_0} + p(x_0) = y_0$

D'où un unique choix pour la constante C : $\quad C = \mathbf{e}^{-ax_0}\,(y_0 - p(x_0))$

Finalement, l'unique solution y au problème différentiel (P) est la fonction définie pour $x \in I$ par :

$$y(x) = (y_0 - p(x_0))\,\mathbf{e}^{a(x - x_0)} + p(x)$$

Exemples :

1. On considère l'équation différentielle (E) : $\quad y' - 2y = \mathbf{e}^{x}$

   Rechercher une solution particulière p de la forme $p(x) = \lambda\,\mathbf{e}^{x}$ où λ est un réel que l'on calculera.

   Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation (E) munie de la condition initiale $y(0) = 0$.

Solution :

La fonction p est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$p'(x) = \lambda\,\mathbf{e}^{x}$$

En remplaçant dans (E): $-\lambda\,\mathbf{e}^{x} = \mathbf{e}^{x}$

D'où : $\lambda = -1$

Une solution particulière p de (E) est : $p(x) = -\,\mathbf{e}^{x}$

Les solutions de l'équation différentielle sans second membre associée (E_0) : $y' - 2y = 0$ sont :

$$x \mapsto C\,\mathbf{e}^{2x}$$

D'où les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$: $y(x) = C\,\mathbf{e}^{2x} - \mathbf{e}^{x}$

Enfin, la condition initiale $y(0) = 0$ donne : $C - 1 = 0$

$$C = 1$$

Finalement, la solution recherchée est : $y(x) = \mathbf{e}^{2x} - \mathbf{e}^{x}$

2. Reprenons le circuit électrique vu au paragraphe 3. On avait :

$$i(t) = I_0\,\mathbf{e}^{-\frac{t}{RC}}$$

Supposons qu'à l'instant $t = 0$, le courant dans le circuit soit égal à $i(0) = 10$ mA

On a alors $I_0 = 10$ et : $i(t) = 10\,\mathbf{e}^{-\frac{t}{RC}}$

6. Autres types d'équations différentielles

6.1. Loi logistique continue. Modèle de Verhulst

On s'intéresse, dans ce paragraphe, aux équations différentielles (E) du type :

$$(E) : y' = ay(M - y) \text{ où } a \in \mathbb{R} \text{ et } M \in \mathbb{R}_+$$

Remarque : on a vu (en 1.) que cette équation différentielle est non linéaire.

Ce type d'équation différentielle apparaît souvent dans la pratique lors de l'étude de problèmes d'évolution. La fonction inconnue y représente alors une proportion. C'est donc une quantité positive.

Ici, nous n'allons pas résoudre (E) mais seulement **rechercher des solutions y qui vérifient $y > 0$ sur un intervalle I**.

La méthode est la suivante :

1. Supposons qu'il existe une solution y de (E) sur I telle que $y > 0$ sur I

   On pose alors, pour tout $x \in I$: $z(x) = \dfrac{1}{y(x)}$

   On dit que l'on effectue un "changement de fonction".

   (Possible car y est supposée ne pas s'annuler sur I)

   La fonction z est dérivable sur I (car y est dérivable et strictement positive sur I) et :

$$z' = -\frac{y'}{y^2} = \frac{ay(y-M)}{y^2} = a - \frac{aM}{y} = a - aMz$$

   On reconnaît ici une équation différentielle linaire d'ordre 1 à coefficients constants avec second membre constant.

2. On en déduit que pour tout $x \in I$:

$$z(x) = C\,\mathbf{e}^{-aMx} + \frac{1}{M} \quad \text{où } C \text{ est une constante}$$

D'où : $$y(x) = \frac{1}{C\mathrm{e}^{-aMx} + \dfrac{1}{M}} = \frac{M}{MC\mathrm{e}^{-aMx} + 1}$$

Et en posant $b = MC$: $$y(x) = \frac{M}{b\mathrm{e}^{-aMx} + 1}$$

Cette fonction est appelée "fonction logistique continue".

Application : *Phénomènes d'évolutions : loi de Malthus & loi de Verhulst*

(Le contexte est celui du problème du Bac S 2003)

On considère une culture de bactéries en milieu clos.

Soit N_0 le nombre de bactéries introduites dans la culture à l'instant $t = 0$ (N_0 étant un réel strictement positif, exprimé en millions d'individus).

Ce problème a pour objet l'étude de deux modèles d'évolution de cette population de bactéries :

- *un premier modèle pour les instants qui suivent l'ensemencement (partie A)*
- *un second modèle pouvant s'appliquer sur une longue période (partie B)*

Partie A - Loi de Malthus

Dans les instants qui suivent l'ensemencement du milieu de culture, on considère que la **vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries en présence**.

Dans ce premier modèle, on note $f(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus). La fonction f est donc la solution de l'équation différentielle :

$$y' = ay.$$

(a est un réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales)

1. Résoudre cette équation différentielle, sachant que $f(0) = N_0$.
2. On note T le temps de doublement de la population bactérienne.

   Démontrer que, pour tout réel t positif : $f(t) = N_0\, 2^{\frac{t}{T}}$
3. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans le cas où $N_0 = 0{,}01$ et $a = 0{,}2$.

Partie B

Le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs...), le nombre de bactéries ne peut pas croître indéfiniment de façon exponentielle. Le modèle précédent ne peut donc s'appliquer sur une longue période. Pour tenir compte de ces observations, on représente l'évolution de la population de bactéries de la façon suivante :

Soit $g(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t (exprimé en millions d'individus) ; la fonction g est strictement positive, dérivable sur $[0, +\infty[$ et vérifie pour tout t de $[0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = ay(1 - y)$$

où a est un réel strictement positif dépendant des conditions expérimentales.

1. À l'aide des résultats précédents, déterminer les solutions strictement positives g de (E).
2. a. Sachant $N_0 = 0{,}01$, exprimer $g(t)$ juste en fonction de a.

   b. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et démontrer, pour tout réel t positif ou nul, l'inégalité :

   $$g(t) < 1$$

   c. Étudier le sens de variation de g.

   d. On suppose $a = 0{,}2$. Tracer la courbe représentative de g dans le même repère que précédemment.