

EXERCICE 1 (7 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = (20x + 10)e^{-\frac{1}{2}x}$.

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 1 cm).

- 1) Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
- 2) Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.
- 3) Établir que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $]0; +\infty[$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α .
- 4) Tracer la courbe \mathcal{C} .
- 5) Calculer l'intégrale $I = \int_0^3 f(x) dx$.

Partie B

On note $y(t)$ la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t , t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t = 0$, est $y(0) = 10$.

On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + \frac{1}{2}y = 20e^{-\frac{1}{2}t}$.

- 1) Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie A est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- 2) On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.
 - a) On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $[0; +\infty[$, vérifiant $g(0) = 10$. Démontrer que la fonction $g - f$ est solution, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, de l'équation différentielle : (E') $y' + \frac{1}{2}y = 0$.
 - b) Résoudre l'équation différentielle (E').
 - c) Conclure.
- 3) Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.
- 4) La valeur θ en degrés Celsius de la température moyenne de cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0; 3]$. Calculer la valeur exacte de θ , puis donner la valeur approchée décimale de θ arrondie au degré.