Approximation d'une courbe par la méthode d'Euler.

Problème

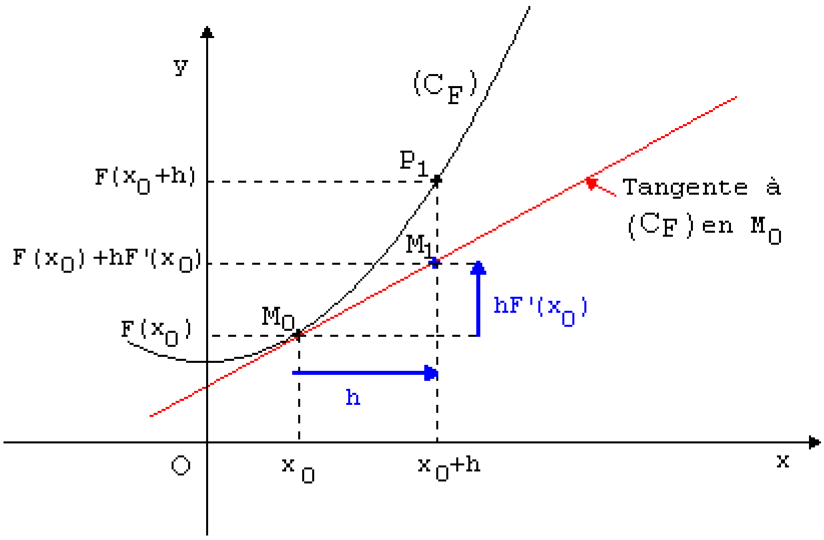
On donne : une fonction f définie sur un intervalle I, x_0 un réel de I et un réel y_0.
On cherche : une fonction F, dérivable sur I, telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout x de I et $F(x_0) = y_0$.

Remarque : Ce problème peut être posé en d'autres termes.

- Déterminer la primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.
- Résoudre sur I l'équation différentielle $Y' = f(x)$ avec la condition initiale $Y(x_0) = y_0$.

Lorsqu'on ne peut trouver une formule explicite de F(x) alors
la méthode d'Euler permet de tracer une courbe approchée de celle de F.

Propriété utilisée : *soit F une fonction dérivable sur un intervalle I et x_0 un réel de I.*
Pour tout réel h non nul et proche de 0 et tel que $x_0 + h$ soit dans I
alors on a la relation $F(x_0 + h) \approx F(x_0) + h\,F'(x_0)$
(« approximation affine d'une fonction par sa tangente »)



Principe de la méthode

1) On place le point M_0 (x_0 ; y_0) qui est un point exact de la courbe (C) de F.

2) Soit h un réel non nul, très proche de 0.

On pose $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, …, $x_n = x_{n-1} + h$ et on calcule, à l'aide de la propriété citée plus haut, une valeur approchée y_1 de $F(x_1)$, y_2 de $F(x_2)$, …, y_n de $F(x_n)$.

- F est dérivable en x_0 donc :

  $F(x_0 + h) \approx F(x_0) + h\,F'(x_0)$ soit $F(x_1) \approx y_0 + hf(x_0)$

En posant $y_1 = y_0 + hf(x_0)$ on obtient $F(x_1) \approx y_1$

et on réitère ce raisonnement en x_1 (avec que x1 + h dans I)

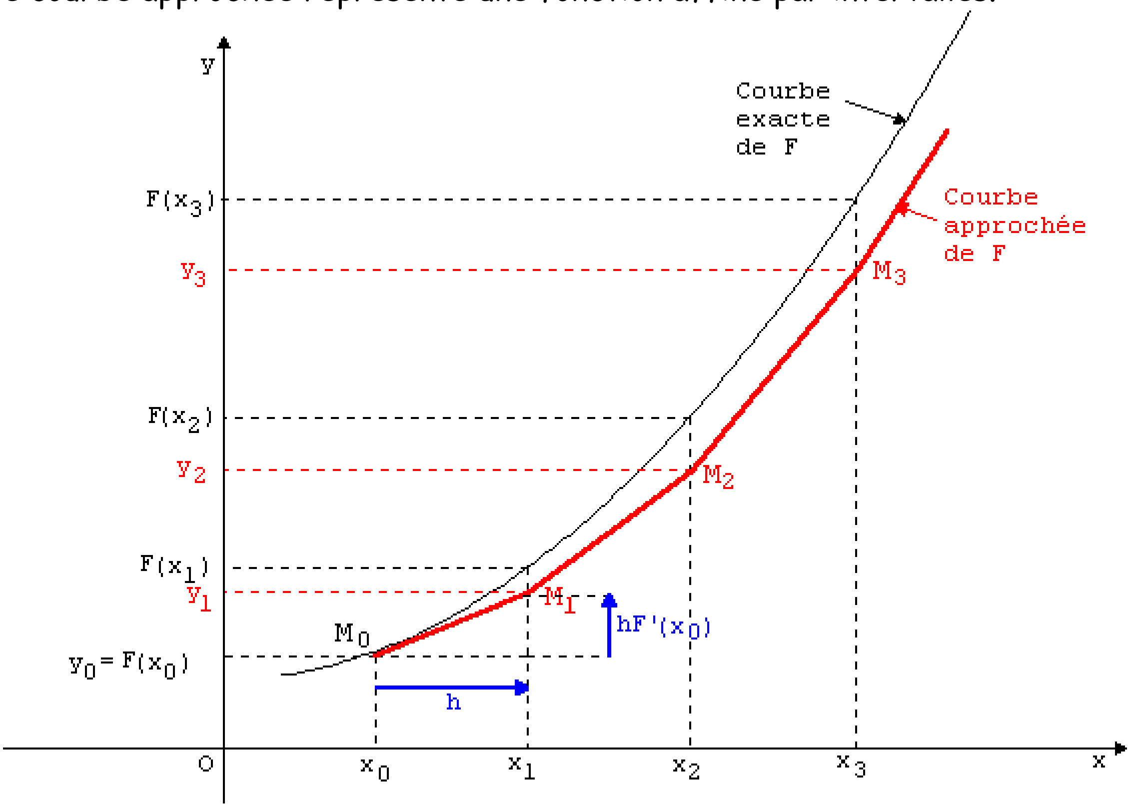
- F est dérivable en x_1 donc :

  $F(x_1 + h) \approx F(x_1) + h\,F'(x_1)$ soit $F(x_2) \approx y_1 + hf(x_1)$

En posant $y_2 = y_1 + hf(x_1)$ on obtient $F(x_2) \approx y_2$

et on réitère ce raisonnement en x_2
Et ainsi de suite …

3) On place ensuite les points $M_1(x_1 ; y_1)$, $M_2(x_2 ; y_2)$, …, $M_n(x_n ; y_n)$.
Pour h très proche de 0, la courbe constituée des segments $[M_0M_1]$, $[M_1M_2]$, …, $[M_{n-1}M_n]$ approche la courbe exacte (C) de F.
Cette courbe approchée représente une fonction affine par intervalles.



Application 1 : courbe approchée sur l'intervalle [-2 ; +2] de la solution de l'équation différentielle $Y' = \dfrac{1}{1+x^2}$ vérifiant la condition initiale $Y(0) = 0$.

- Pour un pas h > 0, la suite des points $M_n(x_n ; y_n)$ est telle que

  $x_0 = 0$ et $x_n = x_{n-1} + h$

  $y_0 = 0$ et $y_n = y_{n-1} + \dfrac{h}{1+(x_{n-1})^2}$

- Pour un pas h < 0, il suffit de remplacer h par – h dans les relations ci-dessus.

- Calculs à l'aide du tableur Excel
  - sur la première ligne on entre les valeurs initiales ;
  - sur la seconde ligne on écrit les formules de récurrence ci-dessus

en utilisant la référence des cellules concernées. Puis on étend ces formules vers le bas à l'aide de la poignée de recopie, jusqu'à faire afficher la valeur 2 pour x_n si $h > 0$ et -2 si $h < 0$.

- ici la solution de l'équation différentielle est connue : c'est la fonction

appelée « arctangente » , notée *atan* par Excel. On peut donc calculer l'ordonnée exacte des points d'abscisse x_n (colonne arctan(x_n)) et l'erreur relative commise dans l'approximation.

Avec les formules, le pas h étant contenu dans la cellule D8 :

31			pas h > 0		
32					
33	A	B	C	D	E
34	n	Xn	Yn	arctan(Xn)	Err rel
35	0	0	0	=ATAN(B35)	0
36	=A35+1	=B35+$D$8	=C35+$D$8/(1+B35^2)	=ATAN(B36)	=(D36-C36)/C36
37	=A36+1	=B36+$D$8	=C36+$D$8/(1+B36^2)	=ATAN(B37)	=(D37-C37)/C37

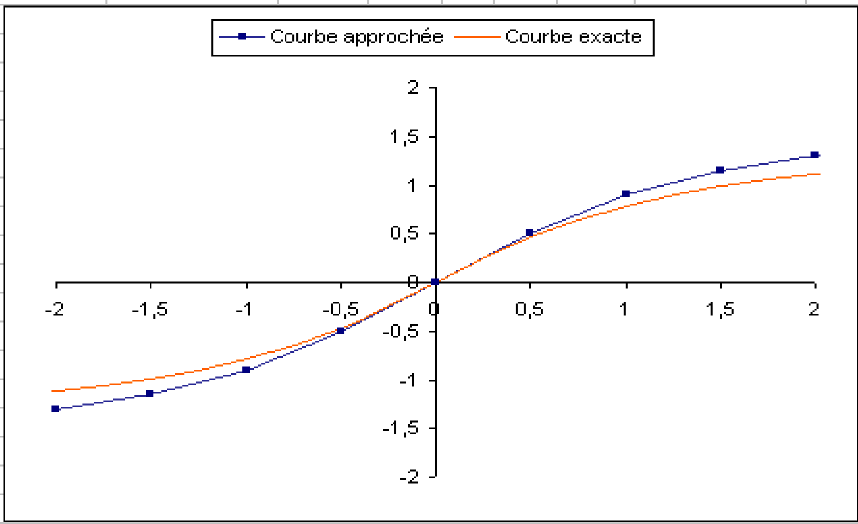
31			pas h < 0		
32					
33	H	I	J	K	L
34	n	Xn	Yn	arctan(Xn)	Err rel
35	0	0	0	=ATAN(I35)	0
36	=H35+1	=I35-$D$8	=J35-$D$8/(1+I35^2)	=ATAN(I36)	=(K36-J36)/J36
37	=H36+1	=I36-$D$8	=J36-$D$8/(1+I36^2)	=ATAN(I37)	=(K37-J37)/J37

31			pas h > 0							pas h < 0		
32												
33	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
34	n	Xn	Yn	arctan(Xn)	Err rel			n	Xn	Yn	arctan(Xn)	Err rel
35	0	0	0	0	0%			0	0	0	0	0%
36	1	0,5	0,5	0,463647609	-7%			1	-0,5	-0,5	-0,463647609	-7%
37	2	1	0,9	0,785398163	-13%			2	-1	-0,9	-0,785398163	-13%
38	3	1,5	1,15	0,982793723	-15%			3	-1,5	-1,15	-0,982793723	-15%
39	4	2	1,303846154	1,107148718	-15%			4	-2	-1,303846154	-1,107148718	-15%
40												

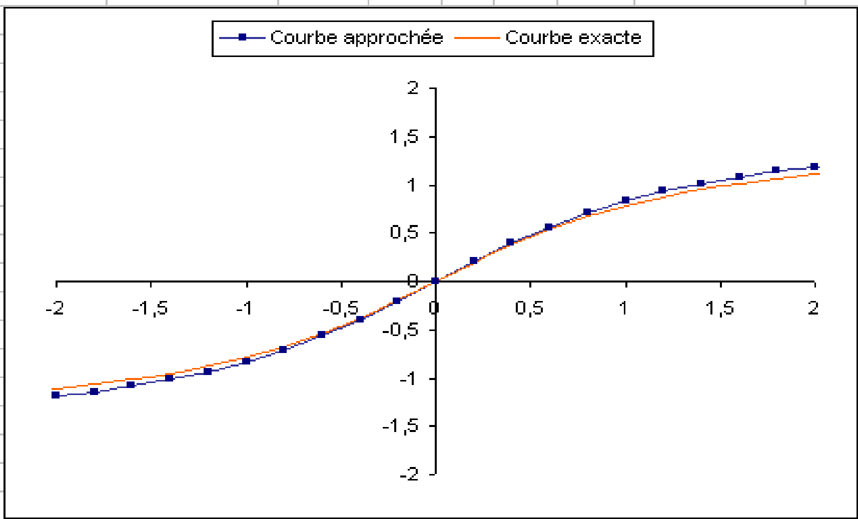
- Représentations graphiques

L'assistant graphique permet de tracer, dans un même repère, la courbe exacte et la courbe approchée de F sur l'intervalle [-2 ; +2].
Notons que l'approximation est d'autant meilleure que le pas h utilisé est petit.

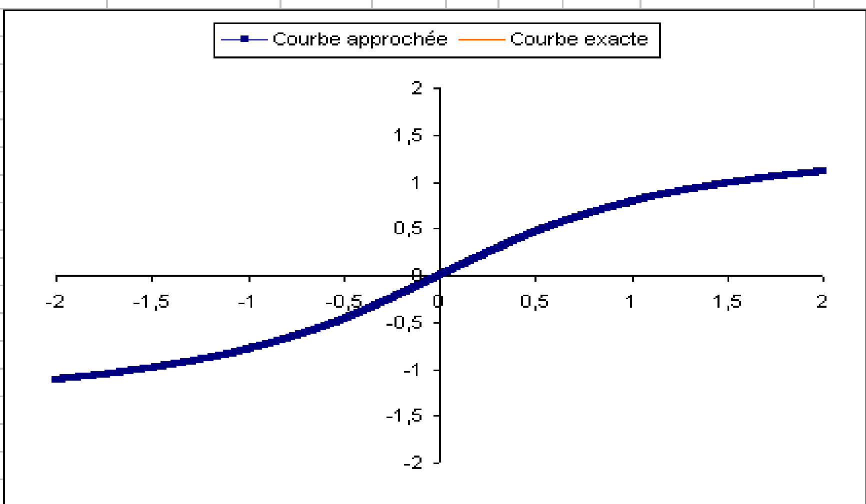
pas h =	0,5



pas h =	0,2



pas h =	0,01



Application 2 : courbe approchée sur l'intervalle [-2 ; +2] de la solution de l'équation différentielle $Y' = Y$ vérifiant la condition initiale $Y(0) = 1$.

- Pour un pas h > 0, la suite des points $M_n(x_n ; y_n)$ est telle que

$$x_0 = 0 \quad \text{et} \quad x_n = x_{n-1} + h$$

$$y_0 = 1 \quad \text{et} \quad y_n = y_{n-1} + h\, y_{n-1} = (1+h)\, y_{n-1}$$

Remarquons que (x_n) est une suite arithmétique de raison h et que (y_n) est une suite géométrique de raison $1+h$.

- Pour un pas h < 0, il suffit de remplacer h par – h dans les relations ci-dessus.

- Calculs à l'aide du tableur Excel
  - ici aussi la solution de l'équation différentielle est connue : c'est la fonction appelée « exponentielle » , notée exp par Excel.

Avec les formules, le pas h étant contenu dans la cellule D8 :

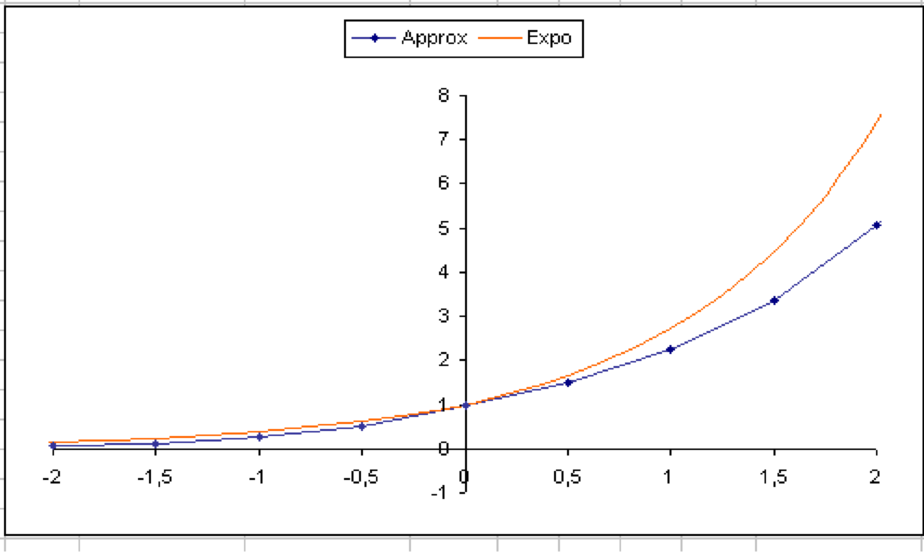
33			pas h > 0		
34					
35	A	B	C	D	E
36	n	Xn	Yn	Exp(Xn)	Err rel
37	0	0	1	=EXP(B37)	=(D37-C37)/C37
38	=A37+1	=B37+$D$8	=C37+$D$8*C37	=EXP(B38)	=(D38-C38)/C38
39	=A38+1	=B38+$D$8	=C38+$D$8*C38	=EXP(B39)	=(D39-C39)/C39

33					
34			pas h < 0		
35					
36	n	Xn	Yn	Exp(Xn)	Err rel
37	0	0	1	=EXP(I37)	=(K37-J37)/J37
38	=H37+1	=I37-$D$8	=J37-$D$8*J37	=EXP(I38)	=(K38-J38)/J38
39	=H38+1	=I38-$D$8	=J38-$D$8*J38	=EXP(I39)	=(K39-J39)/J39

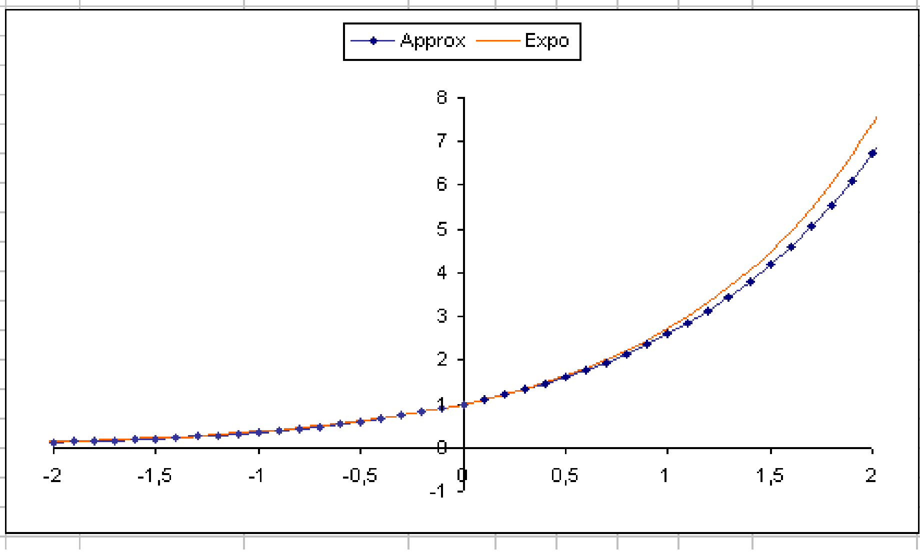
33													
34			pas h > 0							pas h < 0			
35													
36	n	Xn	Yn	Exp(Xn)	Err rel			n	Xn	Yn	Exp(Xn)	Err rel	
37	0	0	1	1	0%			0	0	1	1	0%	
38	1	0,5	1,5	1,648721271	10%			1	-0,5	0,5	0,60653066	21%	
39	2	1	2,25	2,718281828	21%			2	-1	0,25	0,367879441	47%	
40	3	1,5	3,375	4,48168907	33%			3	-1,5	0,125	0,22313016	79%	
41	4	2	5,0625	7,389056099	46%			4	-2	0,0625	0,135335283	117%	

- Représentations graphiques pour différentes valeurs du pas h.

pas h =	0,5



pas h =	0,1



pas h =	0,01