

EXERCICE 4 : (5 points)

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

- 1)
 - a) Déterminer l'ensemble des couples (x, y) de nombres entiers relatifs, solution de l'équation (E) : $8x - 5y = 3$.
 - b) Soit m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple (p, q) de nombres entiers vérifiant $m = 8p + 1$ et $m = 5q + 4$.
Montrer que le couple (p, q) est solution de l'équation (E) et en déduire que $m \equiv 9 \pmod{40}$.
 - c) Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à 2000.
- 2) Soit n un nombre entier naturel.
 - a) Démontrer que pour tout nombre entier naturel k on a : $2^{3k} \equiv 1 \pmod{7}$.
 - b) Quel est le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7 ?
- 3) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.
On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$.
On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.
 - a) Vérifier que $10^3 \equiv -1 \pmod{7}$.
 - b) En déduire tous les nombres entiers N cherchés.