

EXERCICE 3 (5 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, le point A d'affixe $2-i$ et B l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On note I le milieu du segment [AB].

Proposition 1 : « La similitude directe de centre A qui transforme I en O a pour écriture complexe $z' = (1+i)z - 1 - 2i$. »

2. On appelle S l'ensemble des couples (x, y) d'entiers relatifs solutions de l'équation $3x - 5y = 2$.

Proposition 2 : « L'ensemble S est l'ensemble des couples $(5k-1, 3k-1)$ où k est un entier relatif. »

3. On considère l'équation (E) : $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{3}$, où (x, y) est un couple d'entiers relatifs.

Proposition 3 : « Il existe des couples (x, y) d'entiers relatifs solutions de (E) qui ne sont pas des couples de multiples de 3. »

4. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Proposition 4 : « Pour tout entier naturel k ($2 \leq k \leq n$), le nombre $n! + k$ n'est pas un nombre premier. »

5. On considère l'équation (E') : $x^2 - 52x + 480 = 0$, où x est un entier naturel.

Proposition 5 : « Il existe deux entiers naturels non nuls dont le PGCD et le PPCM sont solutions de l'équation (E'). »