Exercice 2 (*5 points*)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent, dans leur quasi-totalité, être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans cette partie, on se propose d'étudier des couples (a,b) d'entiers strictement positifs, tels que :

$$a^2 = b^3.$$

Soit (a,b) un tel couple et $d = \text{PGCD}(a, b)$. On note u et v les entiers tels que $a = du$ et $b = dv$.

1. Montrer que $u^2 = d\,v^3$.
2. En déduire que v divise u, puis que $v = 1$.
3. Soit (a,b) un couple d'entiers strictement positifs.

   Démontrer que l'on a $a^2 = b^3$ si et seulement si a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Montrer que si n est le carré d'un nombre entier naturel et le cube d'un autre entier, alors $n \equiv 0\ [7]$ ou $n \equiv 1\ [7]$.

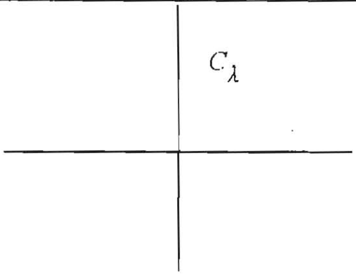
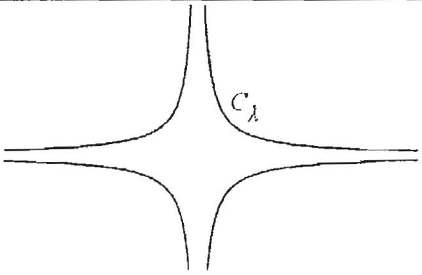
Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la surface S d'équation $x^2 \times y^2 = z^3$.

Pour tout réel λ, on note C_λ la section de S par le plan d'équation $z = \lambda$.

1. Les graphiques suivants donnent l'allure de C_λ, tracée dans le plan d'équation $z = \lambda$, selon le signe de λ.

Attribuer à chaque graphique l'un des trois cas suivants : $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$, et justifier l'allure de chaque courbe.

	(pas de courbe visible)	
graphique 1	graphique 2	graphique 3

2. *a.* Déterminer le nombre de points de C_{25} dont les coordonnées sont des nombres entiers strictement positifs.

   b. Pour cette question, on pourra éventuellement s'aider de la question 3 de la partie A.

   Déterminer le nombre de points de C_{2010} dont les coordonnées sont des nombres entiers strictement positifs.