Quelques exercices à travailleré

Exercice n° 1

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier $4^n - 1$, lorsque n est un entier naturel.
On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « si p est un nombre premier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \bmod p$ ».

Partie A – Quelques exemples

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, 4^n est congru à 1 modulo 3.

2. Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que $4^{28} - 1$ est divisible par 29.

3. Pour $1 \leqslant n \leqslant 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17. En déduire que, pour tout entier k, le nombre $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.

4. Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5 ?

5. A l'aide des questions précédentes déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

Partie B – Divisibilité par un nombre premier

Soit p un nombre premier différent de 2.

1. Démontrer qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $4^n \equiv 1 \bmod p$.

2. Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel tel que $4^n \equiv 1 \bmod p$. On note b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b \equiv 1 \bmod p$ et r le reste de la division euclidienne de n par b.

   a. Démontrer que $4^r \equiv 1 \bmod p$. En déduire que $r = 0$.

   b. Prouver l'équivalence : $4^n - 1$ est divisible par p si et seulement si n est multiple de b.

   c. En déduire que b divise $p - 1$.

Exercice n° 2

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « soit p un nombre premier et a un entier naturel premier avec p ; alors $a^{p-1} - 1$ est divisible par p ».

1. Soit p un nombre premier impair.

   a. Montrer qu'il existe un entier naturel k, non nul, tel que $2^k \equiv 1\ [p]$.

   b. Soit k un entier naturel non nul tel que $2^k \equiv 1\ [p]$ et soit n un entier naturel. Montrer que, si k divise n, alors $2^n \equiv 1\ [p]$.

   c. Soit b tel que $2^b \equiv 1\ [p]$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.
   Montrer, en utilisant la division euclidienne de n par b, que si $2^n \equiv 1\ [p]$, alors b divise n.

2. Soit q un nombre premier impair et le nombre $A = 2^q - 1$.
On prend pour p un facteur premier de A.

   a. Justifier que : $2^q \equiv 1\ [p]$.

   b. Montrer que p est impair.

   c. Soit b tel que $2^b \equiv 1\ [p]$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.
   Montrer, en utilisant **1.** que b divise q. En déduire que $b = q$.

   d. Montrer que q divise $p - 1$, puis montrer que $p \equiv 1\ [2q]$.

3. Soit $A_1 = 2^{17} - 1$. Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 400 et qui sont de la forme $34m + 1$, avec m entier non nul : 103, 137, 239, 307. En déduire que A_1 est premier.