Système de 3 équations à 1 inconnue *« avec des congruences »*

Théorème *(on admettra ce théorème sans démonstration)*

Soit a_1 , a_2 et a_3 3 nombres entiers donnés quelconque

Soit n_1 , n_2 et n_3 3 nombres entiers donnés et <u>deux à deux premiers entre eux</u>

(ce qui veut dire que PGCD $\left(n_i , n_j\right) = 1$ *lorsque* $i \neq j$ *)*

Alors le système $\begin{cases} x \equiv a_1 & [n_1] \\ x \equiv a_2 & [n_2] \\ x \equiv a_3 & [n_3] \end{cases}$ a une et une seule solution modulo N **qui est** $\mathbf{x \equiv x_0 \quad [N]}$

avec $N = n_1 \times n_2 \times n_3$ et $\mathbf{x_0}$ une solution particulière de ce système *(**qu'on sait calculer**)*

et ce document consiste uniquement à montrer comment calculer cette solution particulière

1) On va montrer qu'il est possible de calculer 3 nombres e_1 , e_2 et e_3 et en posant

$\boldsymbol{x_0 = a_1 \times e_1 + a_2 \times e_2 + a_3 \times e_3}$ de trouver une solution particulière de ce système

2) Ce document n'a pas pour objet de montrer que l'ensemble des solutions de ce système est

$\mathbf{x \equiv x_0 \quad [N]}$ *(Je vous conseille de faire cette démonstration par vous-même…)*

<u>**DEMO**</u> : Calcul des nombres e_1, e_2 et e_3 tels que $\boldsymbol{x_0 = a_1 \times e_1 + a_2 \times e_2 + a_3 \times e_3}$ soit solution de ce système

Comme PGCD = $\left(n_1 , n_2 \times n_3\right) = 1$ $\exists\, u_1 \in \mathbb{Z}$ et $\exists\, v_1 \in \mathbb{Z}$ tels que $u_1 \times \left(n_1\right) + v_1 \times \left(n_2 \times n_3\right) = 1$

Posons $e_1 = v_1 \left(n_2 \times n_3\right)$ **on a** $\begin{cases} e_1 \equiv 1 & [n_1] \\ e_1 \equiv 0 & [n_2] \\ e_1 \equiv 0 & [n_3] \end{cases}$ car $\begin{cases} e_1 = 1 - u_1 \times \left(n_1\right) \\ e_1 = 0 + \left(v_1 \times n_3\right) \times \left(n_2\right) \\ e_1 = 0 + \left(v_1 \times n_2\right) \times \left(n_3\right) \end{cases}$

et de la même manière

on peut montrer qu'on peut calculer 2 nombres v_2 et v_3 : *lire les annexes en page 2 du document*

qui permettent de calculer les 2 nombres $\mathbf{e_2 = v_2 \left(n_1 \times n_3\right)}$ *et* $\mathbf{e_3 = v_3 \left(n_1 \times n_2\right)}$

<u>RESULTAT</u> : ***de même que*** $\begin{cases} e_1 \equiv 1 & [n_1] \\ e_1 \equiv 0 & [n_2] \\ e_1 \equiv 0 & [n_3] \end{cases}$ ***on peut calculer*** $\begin{cases} e_2 \equiv 0 & [n_1] \\ e_2 \equiv 1 & [n_2] \\ e_2 \equiv 0 & [n_3] \end{cases}$ ***et*** $\begin{cases} e_3 \equiv 0 & [n_1] \\ e_3 \equiv 0 & [n_2] \\ e_3 \equiv 1 & [n_3] \end{cases}$

ET suite à ces 3 nombres il est TRES FACILE DE MONTRER QUE x_0 est bien une solution particulière

car $x_0 = a_1 \times e_1 + a_2 \times e_2 + a_3 \times e_3$ vérifie $\begin{cases} x_0 \equiv a_1 \times 1 + a_2 \times 0 + a_3 \times 0 & [n_1] \\ x_0 \equiv a_1 \times 0 + a_2 \times 1 + a_3 \times 0 & [n_2] \\ x_0 \equiv a_1 \times 0 + a_2 \times 0 + a_3 \times 1 & [n_3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \equiv a_1 & [n_1] \\ x_0 \equiv a_2 & [n_2] \\ x_0 \equiv a_3 & [n_3] \end{cases}$

ANNEXE : Calcul des 2 autres nombres $\mathbf{e}_2 = \mathbf{v}_2\ (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_3)$ et $\mathbf{e}_3 = \mathbf{v}_3\ (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)$

qui font que le nombre $x_0 = a_1 \times e_1 + a_2 \times e_2 + a_3 \times e_3$ est solution du système $\begin{cases} x_0 \equiv a_1 & [n_1] \\ x_0 \equiv a_2 & [n_2] \\ x_0 \equiv a_3 & [n_3] \end{cases}$

ANNEXE n° 1 :

Calculons le nombre v_2 qui permet de calculer le nombre $\mathbf{e}_2 = \mathbf{v}_2\ (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_3)$

Comme PGCD = $(n_2\ ,\ n_1 \times n_3) = 1$ $\exists\, u_2 \in \mathbb{Z}$ et $\exists\, v_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $u_2 \times (n_2) + v_2 \times (n_1 \times n_3) = 1$

Posons $e_2 = v_2\ (n_1 \times n_3)$ on a $\begin{cases} e_2 \equiv 0 & [n_1] \\ e_2 \equiv 1 & [n_2] \\ e_2 \equiv 0 & [n_3] \end{cases}$

ANNEXE n° 2 :

Calculons le nombre v_3 qui permet de calculer le nombre $\mathbf{e}_3 = \mathbf{v}_3\ (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)$

Comme PGCD = $(n_3\ ,\ n_1 \times n_2) = 1$ $\exists\, u_3 \in \mathbb{Z}$ et $\exists\, v_3 \in \mathbb{Z}$ tels que $u_3 \times (n_3) + v_3 \times (n_1 \times n_2) = 1$

Posons $e_3 = v_3\ (n_1 \times n_2)$ on a $\begin{cases} e_3 \equiv 0 & [n_1] \\ e_3 \equiv 0 & [n_2] \\ e_3 \equiv 1 & [n_3] \end{cases}$

Exercices à travailler : *il est important de faire des exercices pour comprendre cette méthode*

Exercice n° 1 : Trouver une solution particulière x_0 du système (S) : $\begin{cases} x \equiv 2 & [3] \\ x \equiv 3 & [5] \\ x \equiv 2 & [7] \end{cases}$

Exercice n° 2 : Une bande de 17 pirates s'est emparée d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se les partager également, et de donner le reste au cuisinier chinois. Celui-ci recevrait alors 3 pièces. Mais les pirates se querellent, et six d'entre eux sont tués. Le cuisinier recevrait alors 4 pièces. Dans un naufrage ultérieur, seuls le butin, six pirates et le cuisinier sont sauvés, et le partage donnerait alors 5 pièces d'or à ce dernier. Quelle est la fortune minimale que peut espérer le cuisinier quand il décide d'empoisonner le reste des pirates?

Piste de travail : L'exercice n° 2 revient à calculer le plus petit nombre positif $\boldsymbol{x}$ tel que: $\begin{cases} x \equiv 3 & [17] \\ x \equiv 4 & [11] \\ x \equiv 5 & [6] \end{cases}$