DIVISION EUCLIDIENNE

Jean Chanzy

Université de Paris-Sud *

1 Division euclidienne dans $\mathbb{N}$:

Propriété d'Archimède : *Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Alors $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $nb \geq a$.*
Démonstration : Si $a = 0$, alors $n = 1$ convient. Si $a \neq 0$, alors $n = a$ convient car $b \geq 1$ entraîne $ab \geq a$. □

Conséquence S*oient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Alors $\exists q \in \mathbb{N}$ tel que $bq \leq a < b(q+1)$.*
Démonstration de la conséquence : Soit E l'ensemble des entiers naturels n tels que $nb > a$. D'après la propriété d'Archimède, il existe un entier m tel que $mb \geq a+1$, donc $mb > a$, et E n'est pas vide. D'après l'axiome 1 de $\mathbb{N}$, E possède donc un plus petit élément p. $p \in E$ mais $p-1 \notin E$, donc $(p-1)b \leq a < pb$. Si $q = p-1$, on a alors $bq \leq a < b(q+1)$. □

Théorème *Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe un unique entier $q \in \mathbb{N}$ et un unique entier $r \in \mathbb{N}$ tels que :*

$$a = bq + r$$
$$0 \leq r < b.$$

Remarque : a s'appelle le dividende, b le diviseur, q le quotient de la division euclidienne de a par b et r le reste de la division euclidienne de a par b. ♣

Démonstration :

1. Existence de q et r : D'après la conséquence de la propriété d'Archimède, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $bq \leq a < b(q+1)$, c'est-à-dire $0 \leq a - bq < b$. Si on pose alors $r = a - bq$, on obtient $a = bq + r$, avec $0 \leq r < b$.
2. Unicité de q et r : Supposons qu'il existe deux couples $(q_1; r_1)$ et $(q_2; r_2)$ de quotients et de restes tels que
$$\begin{array}{ll} a = bq_1 + r_1 & a = bq_2 + r_2 \\ 0 \leq r_1 < b & 0 \leq r_2 < b. \end{array}.$$
Alors $-b < -r_2 \leq 0$, et $-b < r_1 - r_2 < b$. De plus, $r_1 - r_2 = b(q_2 - q_1)$, ce qui donne $-1 < q_2 - q_1 < 1$, donc $q_2 - q_1 = 0$ et $r_1 - r_2 = 0$, et par suite $q_1 = q_2$ et $r_1 = r_2$.

□

2 Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$:

Théorème *Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$. Alors il existe un unique entier $q \in \mathbb{Z}$ et un unique entier $r \in \mathbb{Z}$ tels que :*

$$a = bq + r$$
$$0 \leq r < |b|.$$

Démonstration :

*Université de Paris-Sud,Bâtiment 425;F-91405 Orsay Cedex

1. <u>**Existence de q et r :**</u>
   - <u>Si $a > 0$ et $b > 0$:</u> On est ramené au cas de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$.
   - <u>Si $a > 0$ et $b < 0$:</u> En utilisant la division euclidienne dans $\mathbb{N}$, on a $a = (-b)q + r$, avec $0 \leq r < -b$, donc $a = b(-q) + r$ et $0 \leq r < |b|$. Le couple $(-q; r)$ convient.
   - <u>Si $a < 0$ et $b > 0$:</u> En utilisant la division euclidienne dans $\mathbb{N}$, on a $-a = bq + r$, avec $0 \leq r < b$, donc $a = b(-q) - r$ et $a = b(-q-1) + b - r$. Si $r = 0$, le couple $(-q; 0)$ convient, si $r \neq 0$, on a $0 < b - r < b$, et le couple $(-q-1; b-r)$ convient.
   - <u>Si $a < 0$ et $b < 0$:</u> En utilisant la division euclidienne dans $\mathbb{N}$, on a $-a = (-b)q + r$, avec $0 \leq r < -b$, donc $a = bq - r$ et $a = b(q+1) - b - r$. Si $r = 0$, le couple $(-q; 0)$ convient, si $r \neq 0$, on a $0 < -r - b < -b$, et le couple $(q+1; -r-b)$ convient.
2. <u>**Unicité de q et r :**</u> Supposons qu'il existe deux couples $(q_1; r_1)$ et $(q_2; r_2)$ de quotients et de restes tels que

$$\begin{array}{ll} a = bq_1 + r_1 & a = bq_2 + r_2 \\ 0 \leq r_1 < |b| & 0 \leq r_2 < |b|. \end{array}.$$

   Alors $-|b| < -r_2 \leq 0$, et $-|b| < r_1 - r_2 < |b|$, donc $|r_1 - r_2| < |b|$. De plus, $r_1 - r_2 = b(q_2 - q_1)$, ce qui donne $|q_2 - q_1| < 1$, donc $q_2 - q_1 = 0$ et $r_1 - r_2 = 0$, et par suite $q_1 = q_2$ et $r_1 = r_2$.

$\square$