L’urne d’Erhenfest

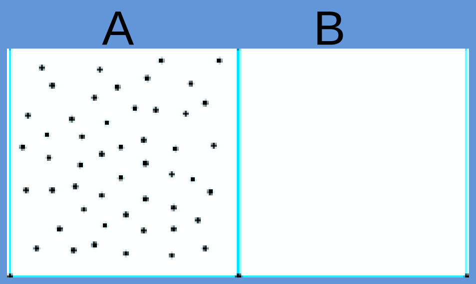
Le modèle

- Modèle de diffusion d’un gaz à travers une paroi poreuse.

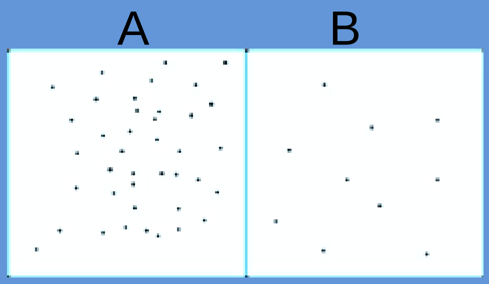
- une enceinte à 2 compartiments A et B contient au total N particules.

- A chaque top d'horloge, une seule particule, *choisie au hasard,* change de compartiment.

- A l’instant initial toutes les particules sont en A.



État initial



État à l’étape k

L’urne d’Erhenfest

Les objectifs

• Etudier l’évolution de la répartition des particules au cours du temps

• Pour les physiciens, lever le paradoxe de l’irréversibilité.

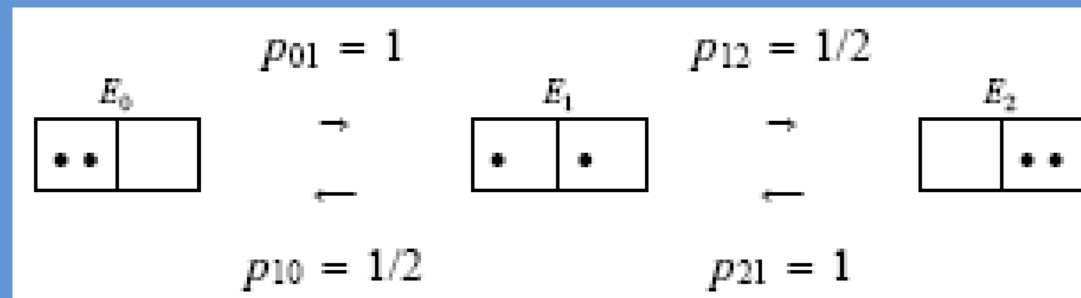
L’objectif pédagogique
- repérer une expérience aléatoire
- prévoir la fluctuation d’échantillonnage
- Observer la stabilisation des fréquences pour les grands nombres.
- Conjecturer une loi de probabilité ….

Remarques importantes :
- la probabilité de passer de A en B, ou de B en A égale à **1/N** .
- Cette probabilité ne dépend pas du temps.
- Le comportement d’une particule est indépendant de celui des autres.

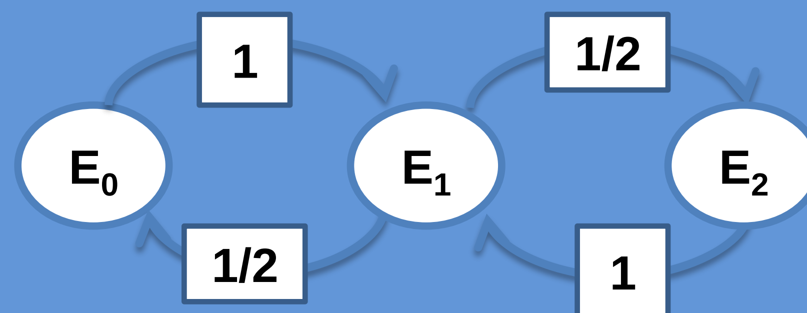
L’urne d’Erhenfest

Une première modélisation avec N = 2

L’urne A peut présenter
3 états possibles pour N=2

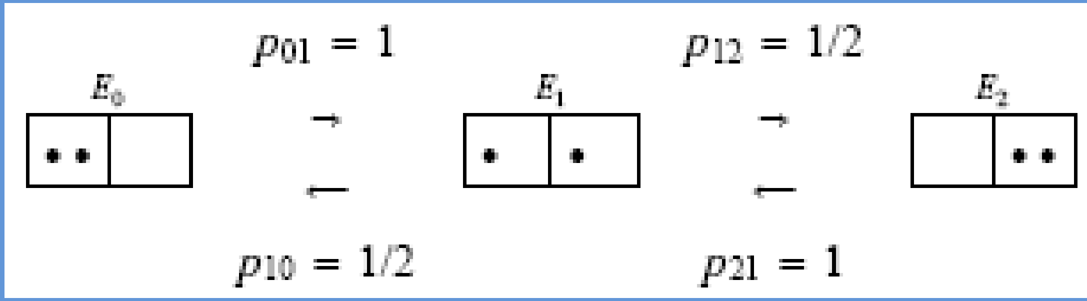


Marche aléatoire sur un segment.



La matrice de transition **P =** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

L’urne d’Erhenfest



X_k : le nombre de particules dans A à l’étape k

X_k peut prendre 3 (N+1) valeurs : 0, 1, 2

V_k = ($P(X_k = 0)$ $P(X_k = 1)$ $P(X_k = 2)$) ---- *matrice ligne de probabilité des états*

k = 0, A est dans l’état E_0 donc : $V_0 = (0 \;\; 0 \;\; 1)$

k = 1, A est dans l’état E_1 donc : **$V_1 = (0 \;\; 1 \;\; 0)$** $\Rightarrow$ **$V_1 = V_0 P$**

k = 2, A est dans l’état E_0 ou E_2 donc : **$V_2 = (1/2 \;\; 0 \;\; 1/2)$** $\Rightarrow$ **$V_2 = V_1 P$**

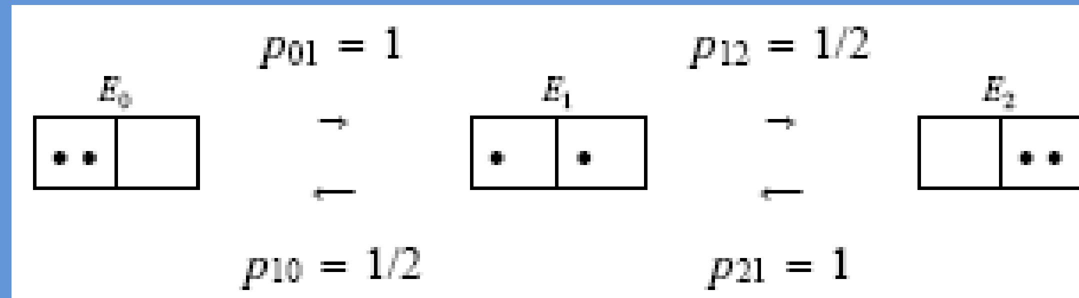
k = 3, A est dans l’état E_1 donc : **$V_3 = (0 \;\; 1 \;\; 0)$** $\Rightarrow$ **$V_3 = V_2 P$**

k = 4, A est dans l’état E_0 ou E_2 donc : **$V_4 = (1/2 \;\; 0 \;\; 1/2)$** $\Rightarrow$ **$V_4 = V_3 P$**

....

L’urne d’Erhenfest

Vers l’équirépartition des particules



pour tout entier k non nul, $V_k = V_{k-1} P$

donc $\mathbf{V_k = V_0 P^k}$

- k impair alors $V_k = (\ 0\ \ 1\ \ 0\ )$ le système se trouve dans l’état E_1
- k pair alors $V_k = (\ 1/2\ \ 0\ \ 1/2\ )$ ……………………………. E_0 ou E_2

$E(X_k) = 1$ donc le nombre moyen de particules dans A vaut 1

tendance à l’équirépartition

[Urnes d’Erhenfest.xlsm]

[VBA.xls]

[Urnes d’Erhenfest.xls]

L’urne d’Erhenfest

Vers l’équirépartition des particules

Nb de particules	étapes	A	B	réversibilité
2	0	2	0	
	1	1	1	
	2	0	2	
	3	1	1	
	4	2	0	4
	5	1	1	
	6	2	0	6
	7	1	1	
	8	0	2	
	9	1	1	
	10	0	2	
	11	1	1	
	12	0	2	
	13	1	1	
	14	2	0	14
	15	1	1	
	16	2	0	16

Nb de particules	A	B
2	0	2

Nb d'étapes = 100

Compteur = 100

Simulation VBA d'Erhenfest

Nb de retours à l'état initial = **257**
pour 10000 étapes

temps de retour = 4

Nb de particules	étapes	A	B
2	0	2	0
....	....	....	....
	10000	**2**	**0**

[Urnes d’Erhenfest.xlsm](#)

[VBA.xls](#)

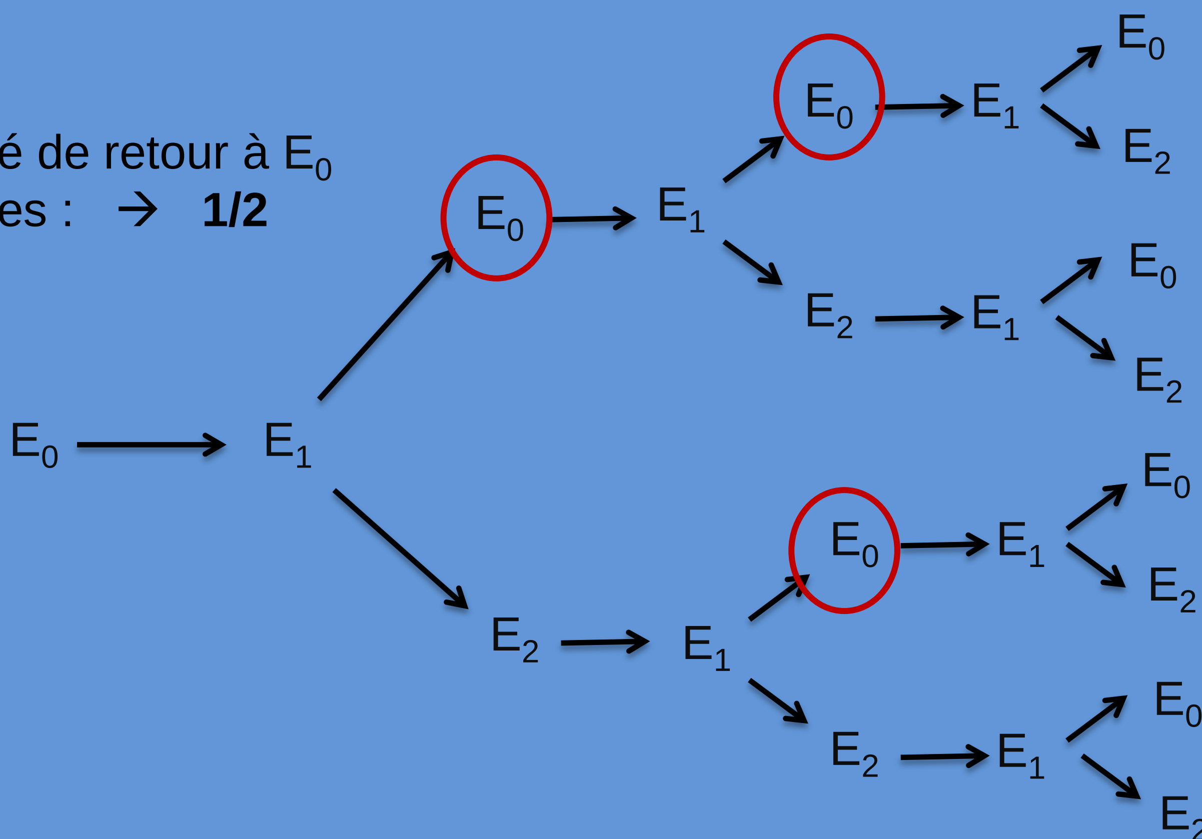
[Urnes d’Erhenfest.xls](#)

L’urne d’Erhenfest

Temps de retour à l’état initial

k impair donc $V_k = (\ 0\ \ 1\ \ 0\ )$ ⇒ On ne peut pas revenir à l’état initial E_0 en un nombre impair d’étapes.

Probabilité de retour à E_0
en **2** étapes : → **1/2**



Probabilité de retour à E_0 en **4** étapes exactement : → **1/4**

L'urne d'Erhenfest

Temps de retour à l'état initial

Calcul du temps de retour moyen dans le cas *N = 2*

T_n la variable aléatoire qui compte le nombre d'étapes pour revenir à l'état initial dans un processus de diffusion correspondant à 2*n étapes*

$p(T_n = 1) = 0, p(T_n = 3) = 0$ et, pour tout entier naturel k, $p(T_n = 2k+1) = 0$;

$p(T_n = 2) = \frac{1}{2}, p(T_n = 4) = \frac{1}{4}$ et, pour tout entier naturel k non nul, $p(T_n = 2k) = \frac{1}{2^k}$

Calculons l'espérance de T_n :

$$E(T_n) = \sum_{k=1}^{2n} k\,p(T_n = k) = \sum_{k=1}^{n} 2k\,p(T_n = 2k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}}$$

$$\Downarrow$$

$$E(T_n) = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$$

Temps de retour.xlsm

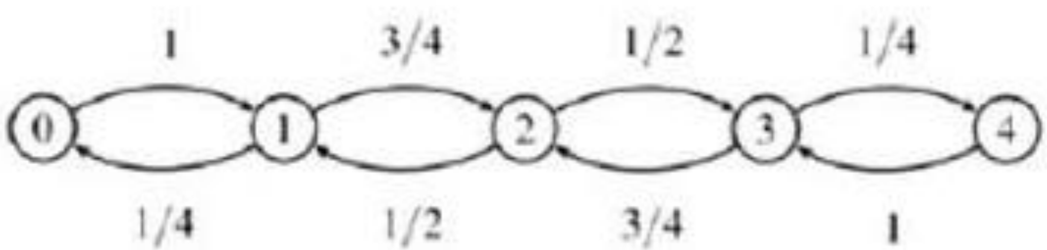
Temps de retour.xls

On reviendrait donc en moyenne à l'état initial E_0 au bout de 4 étapes.

L’urne d’Erhenfest

Le cas où $N = 4$

$$E = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Temps de retour moyen à l’état k

(partant de k boules dans A, on retourne pour la première fois à k boules dans A)

$$m_k = \frac{2^N}{\binom{N}{k}}$$

$k = N$

$$m_N = 2^N$$