

TES₁ : DEVOIR SURVEILLÉ N°2 (2 heures)

Exercice 1 (4 points)

Résoudre l'inéquation :

$$\ln(2x + 1) + \ln(x - 3) \leq \ln(x + 5)$$

Exercice 2 (8 points)

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln x$$

On note C_f sa représentation graphique.

1. Étude des limites de f et du comportement asymptotique de C_f .
 - a) Étudier la limite de f en 0^+ . La courbe C_f admet-elle une asymptote verticale ?
 - b) Étudier la limite de f en $+\infty$. La courbe C_f admet-elle une asymptote horizontale ?
2. Étude du sens de variation de f
 - a) Calculer la dérivée f' de la fonction f .
 - b) En déduire que :

$$f'(x) = \frac{x-1}{x} \quad \text{pour tout } x \in]0 ; +\infty[$$

- c) Dresser le tableau de variation de la fonction f .
3. Représentation graphique.
 - a) Tracer, très soigneusement C_f ainsi que la droite D d'équation $y = x - 1$.
Unités graphiques : 2 cm par unité sur chaque axe
 - b) Résoudre l'équation $f(x) = x - 1$. Représenter sa (ou ses) solution(s) sur le graphique.

Exercice 3 (8 points) Comparaison de deux ajustements affines : droite de Mayer et droite de régression

Une entreprise fabrique huit types de produits. Pour chaque produit, elle dépense des sommes différentes en publicité. Le tableau ci-dessous donne, pour chaque produit, le budget mensuel alloué à la publicité (en €) ainsi que le nombre de commandes faites en un mois à l'entreprise.

Produit	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
X = budget mensuel alloué à la publicité (en €)	5100	7800	11200	15800	20100	22500	26200	28900
Y = nombre de commandes en un mois	620	1080	1480	2020	3000	3360	3880	4200

Sauf mention contraire, tous les calculs pourront être effectués à la calculatrice (les arrondis éventuels seront précisés à chaque question)

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique (X, Y) .

Unités graphiques :

- En abscisses : 1 cm pour 1000 euros.
- En ordonnées : 1 cm pour 200 commandes.

On prendra pour origine le point (5000 ; 600).

2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points. Placer G sur le graphique.
3. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y . (On arrondira à 10^{-3}). Un ajustement affine est-il justifié ?

4. Un premier ajustement affine : la droite de Mayer

Dans cette question, on considère deux sous-nuages : celui constitué des points correspondants aux produits P_1, P_2, P_3 et P_4 et celui constitué des points correspondants aux produits P_5, P_6, P_7 et P_8 .

- a) Calculer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 des deux sous-nuages. Placer les points G_1 et G_2 sur le graphique.
- b) Démontrer qu'une équation de la droite (G_1G_2) sous la forme $y = mx + p$ est :

$$y = 0,16x - 295 \quad (\text{On détaillera les calculs}).$$

(On arrondira m à 10^{-2} près et p à l'unité près)

La droite (G_1G_2) s'appelle la "droite de Mayer". Représenter cette droite sur le graphique.

- c) Recopier et compléter le tableau suivant :

X	5100	7800	11200	15800	20100	22500	26200	28900
Y	620	1080	1480	2020	3000	3360	3880	4200
$0,16X - 295$								
$Y - (0,16X - 295)$								
$[Y - (0,16X - 295)]^2$								

En déduire la somme des résidus quadratiques S associée à la droite Mayer (G_1G_2) .

5. Un deuxième ajustement affine : la droite de régression

- a) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. On notera D cette droite et $y = ax + b$ son équation. Représenter D sur le graphique.

(On arrondira a à 10^{-3} près et b à l'unité près)

- b) La somme des résidus quadratiques S' associée à la droite de régression D est $S' \simeq 79128$. Laquelle des deux droites (G_1G_2) et D réalise-t-elle le meilleur ajustement affine ?

6. Estimations. À l'aide de l'équation de la droite (D) (ou à défaut celle de (G_1G_2)), et en détaillant les calculs, répondre aux deux questions suivantes :

- a) L'entreprise souhaite commercialiser un produit P_9 pour lequel elle envisage un budget mensuel publicitaire de 23400 €. Quelle estimation peut-on faire du nombre commandes pour ce produit ? (On arrondira à l'unité par défaut)
- b) L'entreprise souhaite vendre 1800 exemplaires par mois d'un produit P_{10} . Quel budget mensuel doit-elle prévoir pour la publicité de ce produit ? (On arrondira à l'euro près par excès)