

La calculatrice est autorisée. Les 5 exercices sont indépendants.

Une grande part de la notation sera accordée à la rédaction et aux justifications données (plutôt qu'au résultat lui-même)

**Exercice 1** Règles de calculs (4 points)

Simplifier au maximum chacun des nombres proposés :

$$A = \ln(\sqrt{80}) - \frac{1}{2} \ln 5$$

$$B = \ln(\sqrt{6} - 1) + \ln(\sqrt{6} + 1) - \ln(\sqrt{100}) - \ln \frac{1}{8}$$

$$C = \frac{8 \ln 4}{e^{\frac{3}{4} \ln 16}}$$

$$D = \ln \left[ \left( e^x + e^{-x} \right)^2 - \left( e^x - e^{-x} \right)^2 \right]$$

**Exercice 2** En vrac (4 points)

Toutes les questions suivantes sont indépendantes

1. Résoudre l'inéquation :  $(\ln x)^2 - 29 \ln x + 198 < 0$

2. Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $2x \leq e^x$

3. Résoudre l'équation différentielle :  $y' = 5y$  sachant que  $y(0) = 3$

4. Étudier la limite suivante :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}$

**Exercice 3** Détermination de l'expression d'une fonction (3 points)

On considère une fonction  $f$  définie, sur  $\mathbb{R}$ , par :

$$f(x) = (a x^2 + bx + c) e^{-x}$$

On note  $C$  sa représentation graphique dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On sait que la courbe  $C$  passe par le point  $A(0 ; 1)$  et qu'elle admet une tangente parallèle à  $(Ox)$  au point d'abscisse 1. On sait aussi que  $f'(0) = -6$ .

Déterminer les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

**Exercice 4** Une fonction de Gompertz (4 points)

On considère la fonction  $f$  définie, pour  $x \in \mathbb{R}$ , par :

$$f(x) = e^{-2e^{-3x}}$$

1. Calculer  $f(0)$ .
2. Étudier les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
3. Calculer la dérivée  $f'$  de  $f$ . En déduire le tableau de variations de  $f$ .
4. Déterminer une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $C_f$  au point d'abscisse  $x_0 = \frac{1}{3} \ln 2$ .

**Exercice 5** Injection d'une substance médicamenteuse (5 points)

Lorsqu'on injecte dans le sang d'un malade une quantité  $Q(0)$  d'une substance médicamenteuse, celle-ci est progressivement éliminée, à chaque instant  $t$  (exprimé en heures), avec une vitesse proportionnelle à la quantité restante  $Q(t)$  de cette substance. On a donc :

$$Q'(t) = -aQ(t)$$

(où  $a$  est une constante strictement positive)

1. Exprimer  $Q(t)$  en fonction de  $Q(0)$ ,  $a$  et  $t$ .
2. On suppose que  $Q(0) = 50 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$ .

Au bout d'une heure, il ne reste plus que  $25 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$  de substance médicamenteuse dans le sang du patient. Calculer  $a$ .

3. Dans cette question, on suppose dorénavant que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$Q(t) = 50 e^{-t \ln 2}$$

- a. Déterminer la limite de  $Q$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ . Étudier le sens de variation de la fonction  $Q$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- b. Tracer la courbe  $C$  représentant la fonction  $Q$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- c. Pour maintenir le traitement, on réinjecte, toutes les heures,  $50 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$  du médicament dans le sang du malade. On note  $R_n$  la quantité de substance présente dans le sang après  $n$  heures (immédiatement après la nouvelle injection).

On a donc  $R_0 = Q(0) = 50$  et  $R_1 = Q(1) + 50 = \frac{1}{2} R_0 + 50 = 75 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$ .

(i) Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $R_{n+1} = \frac{1}{2} R_n + 50$

(ii) Exprimer  $R_n$  en fonction de  $n$ . (On pourra chercher  $\alpha$  tel que  $\alpha = \frac{1}{2} \alpha + 50$  et poser  $v_n = R_n - \alpha$ )

(iii) En déduire la limite de la suite  $(R_n)$ .

Donner une interprétation de cette limite.