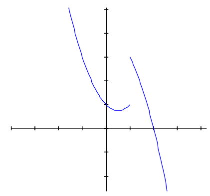
EXISTENCE ET UNICITÉ DE SOLUTION(S) D'ÉQUATION DU TYPE $f(x) = \lambda$

I) Notion de continuité sur un intervalle

<u>Définition 1</u> (intuitive) : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est <u>continue</u> sur I si sa représentation graphique est d'un seul tenant sur I.

<u>Exemples et contre-exemples</u> :



- La fonction représentée ci-contre est non continue sur $[-3 ; 3]$: en effet, elle n'admet pas de limite en 1 (la courbe fait un "saut"). Néanmoins, elle est continue sur $[-3 ; 1[$ et sur $]1 ; 3]$.
- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.

<u>Théorème 1</u> : Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

Théorème admis.

<u>Définition 2</u> : Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle I.

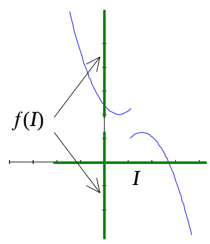
L'image de I, notée $f(I)$, est l'ensemble de tous les nombres $f(x)$ où $x \in I$.

<u>Exemple</u> : $f(x) = x^2$; $I =]-1 ; 2]$; $f(I) = [0 ; 4]$; $J = [0 ; +\infty[$, $f(J) = J$; $K = [0 ; 2]$; $f(K) = [0 ; 4]$.

Il se peut très bien que $f(I)$ ne soit pas un intervalle. Si $f(x) = E(x)$, $E(x)$ désignant la partie entière de x, on a $f([0 ; 1]) = \{0 ; 1\}$.

<u>Théorème 2</u> : Si une fonction f est continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.

<u>Démonstration</u> : admise. Mais le théorème est intuitivement évident : en effet, si $f(I)$ n'est pas un intervalle, on n'arrive pas à construire une fonction f continue sur I :



<u>Remarque</u> :

Soit f une fonction dérivable (donc continue) sur un intervalle I. Si on suppose de plus que f est strictement monotone alors :

$$f([a ; b]) = [f(a) ; f(b)] \text{ lorsque } f \text{ est strictement croissante}$$

$$f([a ; b]) = [f(b) ; f(a)] \text{ lorsque } f \text{ est strictement décroissante}$$

II) Théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I.)

<u>Théorème des valeurs intermédiaires</u> : Soit f une fonction dérivable (donc continue) sur un intervalle $I = [a, b]$.

Alors, pour tout réel λ intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins) un réel $c \in I$ tel que $f(c) = \lambda$.

(Autrement dit, l'équation $f(x) = \lambda$ admet au moins une solution dans I)

Démonstration :

D'après le théorème 2, comme f est continue sur I, $f(I)$ est un intervalle. Par ailleurs on $f(a) \in f(I)$ et $f(b) \in f(I)$, donc $\lambda \in f(I)$ (puisque $f(I)$ est un intervalle et λ est intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$).

Donc, il existe $c \in I$ tel que $f(c) = \lambda$.

Exercice : illustrer ce théorème. Avec une autre illustration, expliquer qu'il ne s'applique pas si f n'est pas continue.

Remarque : le théorème des valeurs intermédiaires s'étend aux intervalles non bornés en ce sens : soit f une fonction dérivable (donc continue) sur un intervalle I. Pour tous a et b de I tels que $a < b$ et pour tout réel λ intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins) un réel $c \in I$ tel que $f(c) = \lambda$.

III) Cas d'une fonction continue strictement monotone

Soit f une fonction dérivable (donc continue) sur un intervalle I.

Le T.V.I. affirme l'existence d'au moins une solution dans I à l'équation $f(x) = \lambda$ lorsque λ est intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$. Quelle condition ajouter pour avoir l'unicité ?

Théorème de bijection : Soit f une fonction dérivable (donc continue) et strictement monotone sur un intervalle $I = [a ; b]$. Pour tout réel λ intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel $c \in I$ tel que $f(c) = \lambda$.

(Autrement dit : l'équation $f(x) = \lambda$ admet une et une seule solution dans I)

Démonstration :

Soit λ un réel intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous avons l'existence d'un réel c dans I tel que $f(c) = \lambda$.

Montrons que ce réel c est unique. Supposons qu'il existe un réel $c' \in I$ tel que $f(c') = \lambda$.

Si $c < c'$, alors $f(c) < f(c')$ (lorsque f est strictement croissante) ou $f(c) > f(c')$ (lorsque f est strictement décroissante). Donc $f(c) \neq f(c')$, c'est-à-dire $\lambda \neq \lambda$, ce qui est absurde.

On raisonne de même si $c > c'$ pour aboutir à la même absurdité.

Donc on a nécessairement $c = c'$ et, par suite, le réel c est unique.

Remarque : le théorème de bijection s'étend aux intervalles non bornés.

Exercice : illustrer ce théorème.

Exemple : soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 + x + 1$. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-1 ; 0]$.

La fonction f est une fonction polynôme donc elle est dérivable (et donc continue) sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-1 ; 0]$.

On a $f'(x) = 3x^2 + 1$. Comme $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-1 ; 0]$.

Enfin, on a : $f(-1) = -1 < 0$ et $f(0) = 1 > 0$. C'est-à-dire : $f([-1 ; 0]) = [-1 ; 1]$. Le réel $\lambda = 0$ est bien intermédiaire entre -1 et 1. Et d'après le théorème de bijection, on déduit :

il existe unique solution α dans $[-1 ; 0]$ à l'équation $f(x) = 0$.

Vocabulaire : lorsque les conditions du théorème de bijection sont réunies, on dit que f réalise une bijection de I sur $f(I)$ (chaque élément de $f(I)$ admet un unique antécédent dans I)

Exemple : $f(x) = x^2$, $I = [1 ; 2]$ et $J = [-1 ; 2]$.

Déterminer $f(I)$ et $f(J)$. f réalise-t-elle une bijection entre I et $f(I)$? Et entre J et $f(J)$?