

Suite de Héron et calcul d'une valeur approchée du nombre : $\sqrt{a}$ avec $a \in \mathbb{N}^*$

Explications

La fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$ permet de définir une suite décroissante qui converge vers $\sqrt{2}$

La fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{3}{x})$ permet de définir une suite décroissante qui converge vers $\sqrt{3}$

La fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{4}{x})$ permet de définir une suite décroissante qui converge vers $\sqrt{4} = 2$

...etc...

Exercice n°1

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$ par : $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$

Question n°1 :

- Montrer que pour tout $x \neq 0$, on a $f(-x) = -f(x)$
Que peut on en déduire ?
- Etudier la fonction f sur $] 0 ; +\infty [$ et déterminer les limites de la fonction f aux bornes de cet ensemble de définition (c'est-à-dire en 0^+ et en $+\infty$)
- Déterminer les variations de la fonction f sur $] 0 ; +\infty [$
- Démontrer que cette fonction a un extremum local pour $x = \sqrt{2}$ et calculer la valeur exacte de cet extremum local
- Dresser le tableau de variation la fonction f sur $] 0 ; +\infty [$ regroupant toutes les informations qui précèdent

Question n°2 :

- Soit la suite réelle (u_n) définie $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$
- Montrer que pour tout entier n : $u_n > 0$ (ce qui permet de conclure que cette suite est bien définie)
- Montrer que pour tout entier n : $u_n \geq \sqrt{2}$
- Montrer que la suite (u_n) est une suite strictement décroissante
- En déduire que la suite (u_n) est une suite convergente
- Calculer u_1 et u_2 (donner la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-5} près)
- Faire une représentation graphique de la fonction f sur $] 0 ; 3]$

ET à l'aide de la droite d'équation $y = x$, « positionner » sur l'axe des abscisses : u_0 , u_1 et u_2

Indication : Faire le dessin sur nouvelle page (au milieu de la page) et prendre une échelle de 4 carreaux pour une unité sur l'axe des abscisses et de 8 carreaux pour une unité sur l'axe des ordonnées....

- On admettra que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{2}$.

Calculer à partir de quel rang la suite (u_n) est une valeur approchée du nombre $\sqrt{2}$ à 10^{-5} près

Question n°3 :

- Ecrire un algorithme qui permet de calculer les 100 premiers termes de la suite (u_n)
- Ecrire un algorithme qui s'arrête après le calcul du 1^{ier} terme de la suite (u_n) qui est une valeur approchée du nombre $\sqrt{2}$ à 10^{-5} près