Les SUITES de Héron

Exercice n° 1

Exercice sur une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres rationnels qui convergent vers le nombre irrationnel $\sqrt{2}$

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$

Cette fonction permet de définir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ récurrente c'est-à-dire telle que $u_{n+1} = f(u_n)$

Question 1 : Calculer les termes $u_1 , u_2 , et\ u_3$ quand $u_0 = 2$

Question 2 : Peut-on avec ces 3 calculs faire la conjecture suivante :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante qui converge vers le nombre irrationnel $\sqrt{2}$

Exercice n° 2

Exercice sur une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres rationnels qui convergent vers le nombre irrationnel $\sqrt{3}$

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{3}{x})$

Cette fonction permet de définir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$

Question 1 : Calculer les termes $u_1 , u_2 , et\ u_3$ quand $u_0 = 3$

Question 2 : Peut-on avec ces 3 calculs faire la conjecture suivante :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante qui converge vers le nombre irrationnel $\sqrt{3}$

Exercice n° 3

Exercice sur une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres rationnels qui convergent vers le nombre irrationnel $\sqrt{5}$

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{5}{x})$

Cette fonction permet de définir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$

Question 1 : Calculer les termes $u_1 , u_2 , et\ u_3$ quand $u_0 = 5$

Question 2 : Peut-on avec ces 3 calculs faire la conjecture suivante :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante qui converge vers le nombre irrationnel $\sqrt{5}$

Exercice n° 4

L'ALGORITHME DE HERON

L'algorithme de Héron permet de déterminer des valeurs approchées de $\sqrt{n}$ pour n entier naturel.

Pour déterminer une valeur approchée de $\sqrt{n}$, on calcule les valeurs successives de $u_2,\ u_3,\ u_4, \dots$ avec $u_1 = n$, $u_2 = \frac{1}{2}\left(u_1 + \frac{n}{u_1}\right)$, $u_3 = \frac{1}{2}\left(u_2 + \frac{n}{u_2}\right)$, $u_4 = \frac{1}{2}\left(u_3 + \frac{n}{u_3}\right)$ et ainsi de suite.

L'objectif de l'activité est de déterminer le nombre de valeurs successives qu'il est nécessaire de calculer pour obtenir la précision souhaitée.

Voici un algorithme écrit en langage naturel permettant de calculer $\sqrt{n}$ avec une précision *p*.

Langage naturel

Entrée
Saisir les réels n et p
 	
Initialisation
Affecter à u la valeur n
Affecter à i la valeur 0
 	
Traitement des données
Tant que (u – racine(n)) > p
    Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}\left(u + \frac{n}{u}\right)$
    Affecter à i la valeur i + 1
 	
Sortie
Afficher u et i

1) Appliquer cet algorithme avec n = 2 et p = 0,01 pour compléter le tableau suivant :

u	2	1,5	…
i	0	…	…
u - $\sqrt{2}$	0,4142	…	…

2) Programmer et tester à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel l'algorithme précédent pour vérifier les résultats du tableau

Avec Python ou avec Scilab, la syntaxe pour "racine carrée" est **sqrt**
En Python, saisir au début du programme **from math import***

3) Combien de valeurs successives sont nécessaires pour obtenir une valeur approchée de $\sqrt{3}$ avec une précision *p* = 0,0001

4) Même question pour $\sqrt{5}$ avec une précision *p* = 10^{-8}