Conditions nécessaires, Conditions suffisantes
Et Conditions nécessaires et suffisantes
ET DIFFERENTS TYPES DE RAISONNEMENTS MATHEMATIQUES

Conditions suffisantes

Définition : Une condition **A** est une condition suffisante de B, si et seulement si la vérité (l'existence ou l'occurrence de) A garantit (ou produit) la vérité (l'existence, l'occurrence) de B.

Considérons un exemple :

[1] Si **A** alors B (en maths on note $A \Rightarrow B$ **)**

[2] S'**il pleut** alors le sol est mouillé

Si la phrase « il pleut » est vraie, alors la phrase « le sol est mouillé » est vraie. La pluie est donc une condition suffisante de l'humidité du sol. Il suffit qu'il pleuve pour que le sol soit mouillé. Néanmoins le sol pourrait être mouillé pour d'autres raisons :

[3] Si **le camion nettoyeur balaie le caniveau**, alors le sol est mouillé.

[4] Si **King Kong se soulage depuis le toit de l'immeuble**, alors le sol est mouillé.

Cela revient à dire que l'on peut appliquer le concept de sol mouillé si on peut appliquer le concept de pluie.

Conditions nécessaires

Définition : Une condition **B** est une condition *nécessaire* de A si et seulement si la fausseté (l'inexistence, l'absence d'occurrence) de B garantit la fausseté (l'inexistence, l'absence d'occurrence) de A

Par exemple,

[5] Si A alors **B**. (en maths on note $A \Rightarrow B$ **qui est équivalent à** $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ **)**

[6] S'il pleut alors **le sol est mouillé**

Si la phrase « le sol est mouillé » était fausse alors la phrase « il pleut » serait fausse. L'humidité du sol est donc une condition nécessaire de la pluie : s'il pleut le sol ne peut pas ne pas être mouillé. On ne peut appliquer le concept de pluie que si l'on peut appliquer le concept de sol mouillé, parce qu'il n'y a de la pluie que si le sol est mouillé. On peut l'exprimer en disant :

[7] Il pleut **seulement si** le sol est mouillé.

Conditions nécessaires et suffisantes.

Définition : Une condition **A** est une condition nécessaire et suffisante de B si et seulement si la vérité (l'existence ou l'occurrence de) A garantit (ou produit) la vérité (l'existence, l'occurrence) de B et la fausseté (l'inexistence, l'absence d'occurrence) de A garantit la fausseté (l'inexistence, l'absence d'occurrence) de B.

En général on l'exprime grâce à la formule « B **si et seulement si** A », c'est-à-dire une proposition biconditionnelle ($B \Leftrightarrow A$). En effet si A est une condition nécessaire et suffisante de B, alors B est aussi une condition nécessaire et suffisante de A. Des conditions peuvent être individuellement nécessaires et *conjointement* suffisantes.

Considérons par exemple, la proposition biconditionnelle suivante :

[9] X est célibataire **si et seulement si** X est un (a) être humain (b) non marié et (c) non pacsé.

est équivalente à la conjonction de

[10] X est célibataire seulement si X est un (a) être humain (b) non marié et (c) non pacsé et
[11] X est un **(a)** être humain **(b)** non marié et **(c)** non pacsé seulement si X est célibataire.

En effet, une proposition biconditionnelle est équivalente à deux propositions conditionnelles : $\boxed{B \Leftrightarrow A \text{ est équivalente à } B \Rightarrow A \text{ et } A \Rightarrow B}$

Remarque : Les conditions (a), (b) et (c) sont individuellement nécessaires et conjointement suffisantes. La proposition **[9]** exprime **une définition.**

Exemple Soit 2 nombres réels a et b quelconque

1) $a = b \quad \Rightarrow \quad a^2 = b^2$

Il suffit que $a = b$ *soit vraie pour que* $a^2 = b^2$ *soit vraie*

$a = b$ est une **CONDITION SUFFISANTE** pour $a^2 = b^2$

2) $a^2 = b^2 \quad \Rightarrow \quad a = b \text{ ou } a = -b$

Il est nécessaire que $a = b$ ou $a = -b$ *soit vraie pour que* $a^2 = b^2$ *soit vraie*

$a = b$ ou $a = -b$ est une **CONDITION NECESSAIRE** pour $a^2 = b^2$

3) $a^2 = b^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = b \text{ ou } a = -b$

$a = b$ ou $a = -b$ *est une* **CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE** *pour* $a^2 = b^2$ **3)**

$a^2 = b^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = b \text{ ou } a = -b$

4) $a^2 = b^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = b \text{ avec } a \geq 0 \text{ et } b \geq 0$

$a = b$ avec $a \geq 0$ et $b \geq 0$ *est une* **CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE** *pour* $a^2 = b^2$

Raisonnement par la « contraposée »

En maths pour démontrer que $A \Rightarrow B$ **on peut démontrer que** $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$

Exemple : Soit n un entier naturel quelconque , démontrons que **si** n^2 **est pair alors** n **est pair**

Pour démontrer cette propriété il est plus facile de démontrer « sa contraposée » c'est-à-dire

$\overline{\text{n est pair}} \Rightarrow \overline{n^2 \text{ est pair}}$ n c'est-à-dire $\text{n est impair} \Rightarrow n^2 \text{ est impair}$

Supposons que $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$ et calculons n^2

$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1$

Posons $k' = 2k^2 + 2k$ comme $k' \in \mathbb{N}$ on obtient $n^2 = 2k' + 1$

ET on peut conclure que **le nombre** n^2 est impair **(cqfd)**

Raisonnement par l'absurde

Exemple : Pour démontrer que le nombre $\sqrt{2}$ **est un nombre irrationnel**

il est plus facile de montrer que $\sqrt{2}$ **est un nombre rationnel EST ABSURDE**

Supposons que $\exists p \in \mathbb{N}$ et $\exists q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ avec $\dfrac{p}{q}$ une fraction irréductible

$\sqrt{2} = \dfrac{p}{q} \Rightarrow q\sqrt{2} = p \Rightarrow q^2 \times 2 = p^2$ on en déduit que le nombre entier p^2 est pair

D'après la démonstration précédente on en déduit que le nombre p est pair

Donc $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k$

Remplaçons p par sa valeur dans $q^2 \times 2 = p^2$ et on obtient que $q^2 \times 2 = (2k)^2$

c'est-à-dire que $q^2 = 2k^2$

donc le nombre q^2 est également pair ce qui permet de dire que le nombre q est pair

Conclusion : La fraction $\dfrac{p}{q}$ N'EST PAS UNE FRACTION IRREDUCTIBLE

On a donc démontré que $\sqrt{2}$ ***est un nombre rationnel* EST ABSURDE**

On peut conclure que $\sqrt{2}$ **est un nombre irrationnel (cqfd)**

Exemples en Géométrie : PROPRIETE CARACTERISTIQUE

Exemple 1

La définition de la droite MEDIATRICE d'un segment [A , B] est la droite qui passe par le milieu de ce segment et qui est perpendiculaire à la droite (AB)

Une propriété da la médiatrice est
Si un point $M \in \text{mediatrice de } [A, B]$ **alors** ce point M vérifie $MA = MB$

On peut démontrer que la propriété réciproque est vraie :
Si un point M vérifie $MA = MB$ **alors** ce point $M \in \text{mediatrice de } [A, B]$

La propriété $MA = MB$ est une PROPRIETE CARACTERISTIQUE de la MEDIATRICE du segment [A , B]

La propriété $MA = MB$ est condition nécessaire et suffisante pour que $M \in \text{mediatrice de } [A, B]$

Exemple 2
Définition d'un parallélogramme :

Soit A , B , C , D 4 points non alignés tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors ABCD est un parallélogramme

Propriété caractéristique d'un parallélogramme :
ABCD est un parallélogramme **si et seulement si** $[A, C]$ et $[B, D]$ se coupent en leur milieu

Si ABCD est un quadrilatère :
« Les diagonales $[A, C]$ *et* $[B, D]$ *se coupent en leur milieu »*
est **une condition nécessaire et suffisante** pour que ABCD soit un parallélogramme