FONCTION EXPONENTIELLE

Introduite à partir de la fonction logarithme népérien

La fonction exponentielle est la plus importante de toutes les Mathématiques. On en trouve dans tous les domaines (finances, économie, physique, biologie, etc...)

1) Définition et premières propriétés

Rappel : La fonction Logarithme népérien (notée ln) réalise une bijection de l'intervalle $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$

Ainsi, pour tout nombre réel *a*, il existe un seul réel *b* appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$ tel que $\ln b = a$

On peut donc définir une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0;+\infty[$ qui est la fonction réciproque de la fonction ln, et qui à tout nombre réel *a*, associe l'unique réel *b* appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$ tel que $\ln b = a$

Définition :
La fonction réciproque de la fonction logarithme népérien ln est appelée la fonction exponentielle de base *e*. Elle se note exp

$$\left.\begin{array}{l}\ln b = a \\ \text{avec} \quad b>0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=\exp(a) \\ \text{avec} \quad a \quad \text{réel} \quad \text{quelconque}\end{array}\right.$$

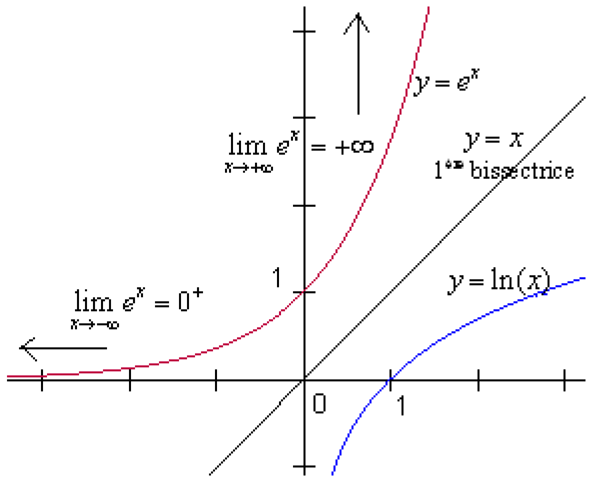
Exemple :

$\left.\begin{array}{l}\ln x = 5 \\ x>0\end{array}\right\}$ *équivaut à* $x=\exp(5)$. D'une façon générale : $\left.\begin{array}{l} y=\exp(x) \\ x\in\mathbb{R}\end{array}\right\}$ équivaut à $\left\{\begin{array}{l} x=\ln(y) \\ y>0\end{array}\right.$

Conséquences immédiates :

Les représentations graphiques des fonctions ln et exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (1ère bissectrice)

D'après la définition de la fonction exponentielle
exp(0)=1, car ln(1)=0
De même exp(1)=e, car ln(e)=1
La fonction exponentielle a pour ensemble de définition $\mathbb{R}$; ainsi, l'exponentielle d'une expression existe dès que cette expression existe.
Pour tout nombre réel *a*, on a $\exp(a) > 0$; ainsi l'exponentielle d'un nombre quelconque est toujours strictement positive, jamais nulle



Pour tout réel *a*, on a ln(exp(*a*))=*a*
Pour tout réel *b*>0, on a exp(ln(*b*)=*b*

Nouvelle notation

Pour tout nombre entier *m*, on a $\ln(e^m) = m\ln(e) = m$.

Par définition de la fonction exponentielle, on a donc : $\ln(e^m) = m \Leftrightarrow e^m = \exp(m)$

On convient d'étendre ce résultat à tout nombre réel *x*, d'où la nouvelle écriture : $\boxed{\exp(x) = e^x}$

2) Propriétés analytiques de la fonction exponentielle

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

L'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe

Propriété :

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa propre dérivée :

Si $f(x) = e^x$ alors $\boxed{f'(x) = e^x}$

En conséquence, puisque $e^x > 0$ pour tout *x* réel, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

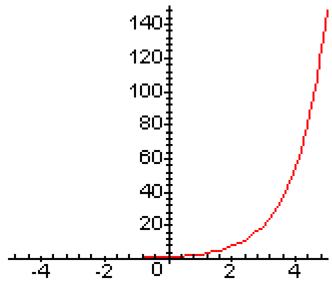
jgcuaz@hotmail.com

Preuve :

Si on note $f(x)=e^x$ et $g(x)=\ln x$ (donc $g'(x)=\dfrac{1}{x}$), alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{e^x-e^{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{e^x-e^{x_0}}{\ln(e^x)-\ln(e^{x_0})}$$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{\dfrac{\ln(e^x)-\ln(e^{x_0})}{e^x-e^{x_0}}}=\dfrac{1}{g'(e^{x_0})}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{e^{x_0}}}=e^{x_0}=f(x_0)$. Ainsi pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\boxed{f(x)=f'(x)=e^x}$.

Tableau de variations :	Courbe représentative
see below	

x	$-\infty$	$+\infty$
e^x	0 ↗	$+\infty$

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, deux réels sont rangés dans le même ordre que leurs exponentielles.

Propriétés: Soient a et b deux nombres réels. Alors :

$a<b \Leftrightarrow e^a<e^b$ $\qquad$ $a<0 \Leftrightarrow e^a<1$ $\qquad$ $a>0 \Leftrightarrow e^a>1$

Propriété :

Puisque la fonction exponentielle réallise une bijetion de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$:

Si a et b sont deux nombres réels, alors : $\boxed{a=b \Leftrightarrow e^a=e^b}$

3) Limites et croissances comparées

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$, et quel que soit le réel α, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^\alpha}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$, et quel que soit le réel α, $\lim\limits_{x\to-\infty}x^\alpha e^x=0$

(on retiendra qu'en présence d'une expression où se mêlent polynômes et exponentielles, ce sont toujours les expressions exponentielles « qui l'emportent »)

Approximation affine de l'exponentielle au voisinage de 0

La fonction exp est dérivable en 0 et exp′(0)=1. De plus exp(0)=1

Ainsi, pour tout réel h, $e^h=1+h+h\varphi(h)$ avec $\lim\limits_{h\to0}\varphi(h)=0$. On en déduit donc que $\boxed{\lim\limits_{h\to0}\dfrac{e^h-1}{h}=1}$

4) Dérivée d'une fonction composée avec l'exponentielle

Théorème :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :

La fonction $f(x)=e^{u(x)}$ est dérivable sur I et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\boxed{f'(x)=u'(x)e^{u(x)}}$

Ce résultat s'utilise aussi dans l'autre sens :

Une primitive d'une fonction de la forme $u'e^u$ sera e^u.

 jgcuaz@hotmail.com

5) Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

Les propriétés algébriques de la fonction exponentielle découlent de celles de la fonction logarithme népérien.

Propriétés :
Pour tous réels a et b ,

$$e^{a+b}=e^{a}\times e^{b} \qquad e^{-a}=\frac{1}{e^{a}} \qquad e^{a-b}=\frac{e^{a}}{e^{b}} \qquad \left(e^{a}\right)^{n}=e^{na}$$

Preuve :
D'une part $\ln(e^{a+b})=a+b$, et d'autre part, $\ln(e^{a}\times e^{b})=\ln(e^{a})+\ln(e^{b})=a+b$
Ainsi $e^{a+b}=e^{a}\times e^{b}$
Les autres formules se déduisent facilement

Remarque :
On retrouve $e^{0}=1,\ e^{1}=e,\ e^{-1}=\dfrac{1}{e}$.
L'exponentielle est assimilable à une **puissance du nombre *e***, ainsi, les règles de calcul précédentes sont analogues à celles sur les puissances

6) Puissance réelle d'un nombre positif, fonction puissance

Lorsque a est un nombre strictement positif, pour tout entier relatif n, on a $\ln(a^{n})=n\ln a$; donc $a^{n}=\exp(\ln(a^{n}))=e^{n\ln a}$

De même, on définit :

Définition :
Pour tout nombre réel a>0, et pour tout nombre réel b, on **définit** le réel a^{b} comme $a^{b}=e^{b\ln a}$

Cette définition généralise celle connue pour des exposants entiers naturels, relatifs ou rationnels d'un nombre strictement positif.

Propriétés :
Les règles de calcul connues dans le cas d'exposants entiers s'étendent aux exposants non entiers :
Pour tous réels a>0 et a'>0, et pour tous réels b et b' :

$$1^{b}=1^{b} \qquad a^{b}a^{b'}=a^{b+b'} \qquad (aa')^{b}=a^{b}a'^{b} \qquad \left(a^{b}\right)^{b'}=a^{bb'} \qquad \frac{a^{b}}{a^{b'}}=a^{b-b'} \qquad \frac{a^{b}}{a'^{b}}=\left(\frac{a}{a'}\right)^{b}$$

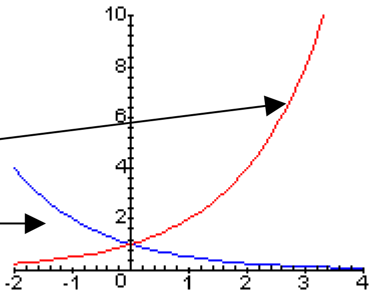
Pour tout réel a>0, on peut donc définir la fonction puissance $\begin{array}{l} f\ :\ \mathbb{R}\to\left]0;+\infty\right[\\ \quad x\to f(x)=a^{x}=e^{x\ln a}\end{array}$

La dérivée de f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x)=(\ln a)e^{x\ln a}$

Comme $e^{x\ln a}>0$ pour tout réel x, on en déduit que f' est du signe de $\ln a$.
Ainsi :

Si $a>1$, alors $\ln a>0$ et la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
Si $0<a<1$, alors $\ln a<0$ et la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

(en bleu, $x\to\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$ et en rouge, $x\to 2^{x}$)



jgcuaz@hotmail.com