

FONCTIONS EXPONENTIELLES

Introduite seule

1) Problématique - Rappel sur les puissances

On connaît les fonctions puissances $x \mapsto x^n$, avec :

$$n \in \mathbb{N} \quad 3^3 = 3 \times 3 \times 3 \quad n \in \mathbb{Z} \quad 3^{-4} = \frac{1}{3^4}$$

$$n \in \mathbb{Q} : \quad 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \text{ et de manière générale } 3^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{3^p}$$

Problématique : Comment définir 3^π , puisque π n'est pas un nombre rationnel ?

On connaît les propriétés des fonctions puissances, notamment :

$$\begin{cases} a^{m+n} = a^m \times a^n \\ (a^m)^n = a^{m \times n} \end{cases} \text{ pour } m \text{ et } n \text{ rationnels et pour } a > 0$$

(attention $a > 0$ car sinon on pourrait écrire : $-1 = (-1)^1 = (-1)^{2 \times \frac{1}{2}} = ((-1)^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$, ce qui est bien évidemment faux !)

Nous allons chercher (si elle existe !) une fonction f prolongeant ces propriétés aux réels, c'est à dire une fonction f définie, dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout x et tout y réels :

$$f(x+y) = f(x) \times f(y) \quad (*)$$

2) Propriétés d'une telle fonction

Remarque :

Les fonctions identiquement constantes $\equiv 0$ et $\equiv 1$ sont solutions

Dans toute la suite, on considèrera une fonction **non identiquement nulle**

2-1) Il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$

Alors l'égalité (*) permet d'écrire que $f(x_0 + 0) = f(x_0) \times f(0)$, et puisque $f(x_0) \neq 0$, on a donc $f(0) = 1$

2-2) f ne s'annule jamais

Par l'absurde, s'il existait un réel a tel que $f(a) = 0$, alors on aurait :

$$\text{Pour tout réel } x \quad f(x) = f(x - a + a) = f(x - a) f(a) = 0$$

Or on suppose que f n'est pas la fonction identiquement nulle.

L'hypothèse de départ est donc absurde.

Ainsi, pour tout réel a , $f(a) \neq 0$

2-3) Pour tout réel a fixé, on considère les fonctions $g : t \rightarrow f(a+t)$ et $h : t \rightarrow f(a)f(t)$.

Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$, g et h le sont et pour tout t réel,

$$g'(t) = f'(a+t) \text{ et } h'(t) = f(a)f'(t)$$

Puisque $f(a+t) = f(a)f(t) \Leftrightarrow g(t) = h(t)$, alors $g'(t) = h'(t)$

$$\text{En particulier pour } t = 0, \quad f'(a) = f'(0)f(a)$$

Ceci étant vrai pour tout réel a , on peut conclure qu'il existe k réel, tel que $f'(x) = kf(x)$ avec $k = f'(0)$

2-4) Conséquences de 2-1, 2-2 et 2-3)

Puisque f ne s'annule jamais, est continue sur $\mathbb{R}$, et puisque $f(0) = 1$, alors pour tout réel x , on a $f(x) > 0$

Ainsi :

$$k > 0 \Rightarrow f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$

$$k < 0 \Rightarrow f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}.$$

$$k = 0 \Rightarrow f \text{ est constante}$$

3) Construction d'une solution dans le cas $k=1$

On cherche à construire UNE fonction définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}.$$

On découpe l'intervalle $[0;2]$ à l'aide des réels $x_0 = 0$; $x_1 = 0,1$; ... ; $x_{19} = 1,9$ et $x_{20} = 2$

Grâce à l'approximation affine de f en x_n pour tout n , on trouve :

$$f(x_n + 0,1) \approx f(x_n) + 0,1 f'(x_n) \approx f(x_n) + 0,1 f(x_n) \approx 1,1 f(x_n)$$

d'où, de proche en proche :

$$f(0) = 1 ; f(0,1) \approx 1,1 f(0) \approx 1,1 \text{ et pour tout } n > 0, f(x_n) \approx 1,1 f(x_{n-1}) \approx 1,1^n$$

En découpant l'intervalle $[-2;0]$ à l'aide des réels $y_0 = 0$; $y_1 = -0,1$; ... ; $y_{19} = -1,9$ et $y_{20} = -2$

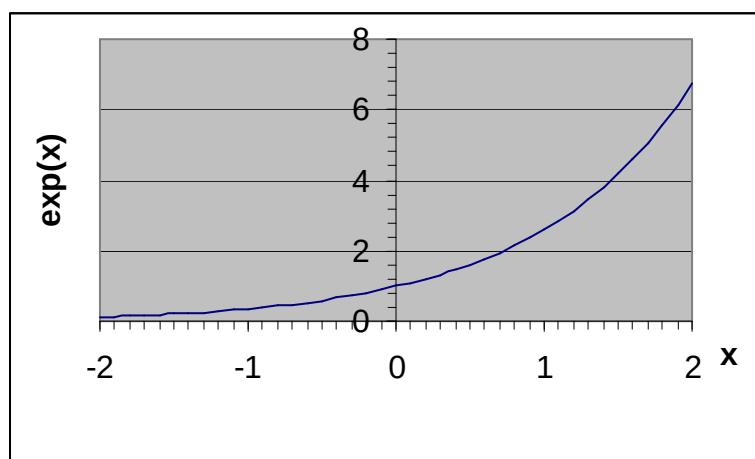
Grâce à l'approximation affine de f en y_n pour tout n , on trouve :

$$f(y_n - 0,1) \approx f(y_n) - 0,1 f'(y_n) \approx f(y_n) - 0,1 f(y_n) \approx 0,9 f(y_n)$$

d'où, de proche en proche :

$$f(0) = 1 ; f(-0,1) \approx 0,9 f(0) \approx 0,9 \text{ et pour tout } n > 0, f(y_n) \approx 0,9 f(y_{n-1}) \approx 0,9^n$$

On obtient la courbe :



Comparaison de différents pas

Soit n le nombre de graduations, et $h = \frac{1}{n}$.

On découpe l'intervalle $[0;1]$ à l'aide des réels $x_0 = 0$; $x_1 = h$; $x_2 = 2h$; ... et $x_n = nh = 1$

Grâce à l'approximation affine de f en x_k pour tout k , on trouve :

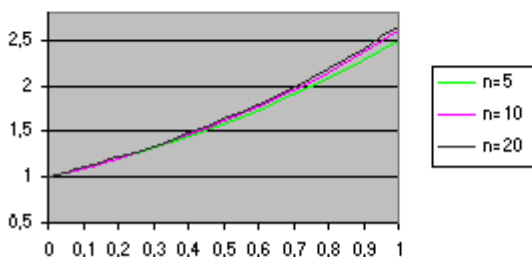
$$f(x_k + h) \approx f(x_k) + h f'(x_k) \approx f(x_k) + h f(x_k) \approx (1+h) f(x_k)$$

d'où, de proche en proche :

$$f(x_k) \approx (1+h)^k$$

La feuille de calcul ci-dessous montre différentes approximations de la fonction solution avec différents pas de division de l'intervalle $[0;1]$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	n=	5			n=	10			n=	20	
2	h=	0,2			h=	0,1			h=	0,05	
3	k	xk	(1+h)^k		k	xk	(1+h)^k		k	xk	(1+h)^k
4	0	0	1		0	0	1		0	0	1
5	1	0,2	1,2		1	0,1	1,1		1	0,05	1,05
6	2	0,4	1,44		2	0,2	1,21		2	0,1	1,1025
7	3	0,6	1,728		3	0,3	1,331		3	0,15	1,157625
8	4	0,8	2,0736		4	0,4	1,4641		4	0,2	1,2155063
9	5	1	2,48832		5	0,5	1,61051		5	0,25	1,2762816
10					6	0,6	1,771561		6	0,3	1,3400956
11					7	0,7	1,9487171		7	0,35	1,4071004
12					8	0,8	2,14358881		8	0,4	1,4774554
13					9	0,9	2,357947691		9	0,45	1,5513282
14					10	1	2,59374246		10	0,5	1,6288946
15									11	0,55	1,7103394
16									12	0,6	1,7958563
17									13	0,65	1,8856491
18									14	0,7	1,9799316
19									15	0,75	2,0789282
20									16	0,8	2,1828746
21									17	0,85	2,2920183
22									18	0,9	2,4066192
23									19	0,95	2,5269502
24									20	1	2,6532977
25											
26											
27											



La formule (recopiable en bas) contenue dans la cellule B5 est « =B4+\$B\$2 »

La formule (recopiable en bas) contenue dans la cellule C4 est « =(1+\$B\$2)^A4 »

Dans F5 :=F4+\$F\$2 et dans G4 :=(1+\$F\$2)^E4

Dans J5 :=J4+\$J\$2 et dans K4 :=(1+\$J\$2)^I4

Avec un pas h de plus en plus petit, le tracé obtenu est de plus en plus proche de la courbe représentative de la fonction exponentielle

4) La fonction exponentielle

Définition :

On appelle exponentielle **LA** fonction f définie continue dérivable sur $\mathbb{R}$, et telle que :

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On note $f(x) = \exp(x)$ ou $f(x) = e^x$

Preuve de l'unicité :

Si une autre fonction g vérifie également $\begin{cases} g'(x) = g(x) \\ g(0) = 1 \end{cases}$, alors en posant $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, on a :

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{(g(x))^2} = 0, \text{ donc } h \text{ est constante. Comme } h(0) = 1, \text{ on conclut}$$

$$\text{que pour tout } x \text{ réel, } h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

Cas général :

L'unique fonction f définie continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant : $\begin{cases} f'(x) = kf(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$, est la fonction $x \rightarrow \exp(kx)$

5) Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

$f'(x) = f(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$. Ainsi pour tous réels a et b :

$$\boxed{\exp(a) < \exp(b) \Leftrightarrow a < b} \quad \text{et} \quad \boxed{\exp(a) = \exp(b) \Leftrightarrow a = b}$$

De plus :

$$1) \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad 2) \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \quad 3) \exp\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \prod_{i=1}^n \exp(x_i), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$4) \exp(nx) = (\exp x)^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}, \text{ et pour tout } r \text{ rationnel, } \exp(rx) = (\exp x)^r$$

Preuve :

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x + (-x)) = \exp(x) \times \exp(-x)$ et par ailleurs $\exp(x + (-x)) = \exp(0) = 1$. On conclut

$$\text{ainsi que pour tout } x \in \mathbb{R}, \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

2) En conjuguant la formule $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$ et $\exp(-y) = \frac{1}{\exp(y)}$, on obtient le résultat attendu

3) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: évident si $n=1$, et si $\exp\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \prod_{i=1}^n \exp(x_i)$, alors

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^n x_i + x_{n+1}\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \times \exp(x_{n+1}) = \left(\prod_{i=1}^n \exp(x_i)\right) \times \exp(x_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n+1} \exp(x_i)$$

4) On applique la formule précédente pour tous les $x_i = x$. Ainsi $\exp(nx) = (\exp x)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

De plus, si $n \in \mathbb{Z}$, on pose $m = -n \in \mathbb{N}$. On applique la propriété à m : $\exp(mx) = (\exp x)^m$, et on revient à n :

$$\exp(-nx) = (\exp x)^{-n} \Leftrightarrow \frac{1}{\exp(-nx)} = \frac{1}{(\exp x)^{-n}} \Leftrightarrow \exp(nx) = (\exp x)^n. \text{ CQFD}$$

La formule $\exp(rx) = (\exp x)^r$, $r \in \mathbb{Q}$ est admise.

NOTATION :

Pour tout r rationnel, on a $\exp(r) = \exp(r \times 1) = (\exp(1))^r$

Si on note $e = \exp(1)$, $\exp(r)$ peut se noter e^r .

On généralise, **en notant pour tout x réel e^x pour $\exp(x)$.**

6) Propriétés analytiques de la fonction exponentielle

Propriétés :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+}$$

Preuve :

1) Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on pose $f(x) = e^x - x$. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme différence de deux fonctions qui le sont, et pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = e^x - 1 > 0$, car $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 1$. f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. En particulier, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) > f(0) \Leftrightarrow e^x - x > 1 \Leftrightarrow e^x > 1 + x$.

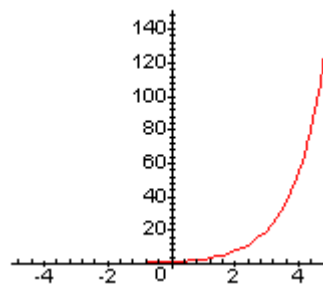
Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x = +\infty$, on conclut par minoration que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

2) En posant $X = -x$, on obtient $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^{-X}$. Or $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ et $e^{-X} = \frac{1}{e^X}$. On en conclut donc que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^{-X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^X} = 0$$

Tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
e^x	0	$+\infty$

Courbe représentative**Autres limites :**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \text{ et quel que soit le réel } \alpha, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0, \text{ et quel que soit le réel } \alpha, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha e^x = 0$$

(on retiendra qu'en présence d'une expression où se mêlent polynômes et exponentielles, ce sont toujours les expressions exponentielles « qui l'emportent »)

Preuve :

1) Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on pose $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2$. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme différence de deux fonctions qui le sont, et pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = e^x - x$. Or nous avons vu dans la question précédente que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $e^x > 1 + x \Leftrightarrow e^x - x > 1$. f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. En particulier, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) > f(0) \Leftrightarrow e^x - \frac{1}{2}x^2 > 1 \Leftrightarrow e^x > \frac{1}{2}x^2 + 1 \Rightarrow e^x > \frac{1}{2}x^2$. Par division par $x > 0$, on obtient $\frac{e^x}{x} > \frac{1}{2}x$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x = +\infty$, on conclut par minoration que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Si $\alpha \leq 0$, le résultat est évident (ce n'est pas une forme indéterminée)

Si $\alpha > 0$,

Si $\alpha < 1$, $\alpha = 1 - \beta$, avec $\beta < 0$. On a alors $\frac{e^x}{x^\alpha} = \frac{e^x}{x^{1-\beta}} = \frac{e^x}{x \times x^{-\beta}} = \frac{e^x}{x} \times x^{-\beta}$

D'après le résultat précédent, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, et puisque $\beta < 0 \Leftrightarrow -\beta > 0$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\beta} = +\infty$

Si $\alpha > 1$, alors $\frac{e^x}{x^\alpha} = \frac{\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\right)^\alpha}{x^\alpha} = \left(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\right)^\alpha$. Si on pose $u = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{u}$, on aura $\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Ainsi, $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \frac{1}{\alpha} \frac{e^u}{u}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \frac{e^u}{u} = +\infty$. Puisque $\lim_{v \rightarrow +\infty} v^\alpha = +\infty$, on en conclut par composition que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

2) En posant $X = -x$, on obtient $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} -X e^{-X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{X}{e^X} = 0$, par inversion de la limite $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$

Approximation affine de l'exponentielle au voisinage de 0

La fonction exp est dérivable en 0 et $\exp'(0) = 1$. De plus $\exp(0) = 1$

Ainsi, pour tout réel h , $e^h = 1 + h + h\phi(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \phi(h) = 0$. On en déduit donc que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

Dérivée d'une fonction composée avec l'exponentielle

Théorème :

Soit u une fonction dérivable sur un ensemble D . Alors :

La fonction $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur D et pour tout $x \in D$, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$

Ce résultat s'utilise aussi dans l'autre sens :

Une primitive d'une fonction de la forme $u'e^u$ sera e^u .

7) Puissance d'un nombre positif, fonction puissance réelle

Lorsque a est un nombre strictement positif, pour tout entier relatif n , on a $\ln(a^n) = n \ln a$; donc $a^n = \exp(\ln(a^n)) = e^{n \ln a}$

De même, on définit :

Définition :

Pour tout nombre réel $a > 0$, et pour tout nombre réel b , on **définit** le réel a^b comme $a^b = e^{b \ln a}$

Cette définition généralise celle connue pour des exposants entiers naturels, relatifs ou rationnels d'un nombre strictement positif. Elle répond donc au problème posé dans le paragraphe 1

Propriétés :

Les règles de calcul connues dans le cas d'exposants entiers s'étendent aux exposants non entiers :

Pour tous réels $a > 0$ et $a' > 0$, et pour tous réels b et b' :

$$1^b = 1 \quad a^b a^{b'} = a^{b+b'} \quad (aa')^b = a^b a'^b \quad (a^b)^{b'} = a^{bb'} \quad \frac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'} \quad \frac{a^b}{a'^b} = \left(\frac{a}{a'}\right)^b$$

Preuves : Pour tous réels $a > 0$ et $a' > 0$, et pour tous réels b et b' :

$$1^b = e^{b \ln(1)} = e^{b \times 0} = e^0 = 1$$

$$a^b a^{b'} = e^{b \ln a} \times e^{b' \ln a} = e^{b \ln a + b' \ln a} = e^{(b+b') \ln a} = a^{b+b'}$$

$$(aa')^b = e^{b \ln(aa')} = e^{b[\ln a + \ln a']} = e^{b \ln a + b \ln a'} = e^{b \ln a} e^{b \ln a'} = a^b a'^b$$

$$(a^b)^{b'} = (e^{b \ln a})^{b'} = e^{b' \ln(e^{b \ln a})} = e^{b' b \ln a} = a^{bb'}$$

$$\frac{a^b}{a^{b'}} = \frac{e^{b \ln a}}{e^{b' \ln a}} = e^{b \ln a - b' \ln a} = e^{(b-b') \ln a} = a^{b-b'}$$

$$\frac{a^b}{a'^b} = \frac{e^{b \ln a}}{e^{b \ln a'}} = e^{b \ln a - b \ln a'} = e^{b(\ln a - \ln a')} = e^{b \ln\left(\frac{a}{a'}\right)} = \left(\frac{a}{a'}\right)^b$$

Etude des fonctions puissance réelle :

Pour tout réel $a > 0$, on peut donc définir la fonction puissance $f : \mathbb{R} \rightarrow]0; +\infty[$

$$x \mapsto f(x) = a^x = e^{x \ln a}$$

La dérivée de f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = (\ln a)e^{x \ln a}$

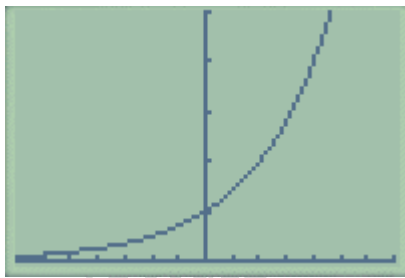
Comme $e^{x \ln a} > 0$ pour tout réel x , on en déduit que f' est du signe de $\ln a$.

Ainsi :

Si $a > 1$, alors $\ln a > 0$ et la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$	Si $0 < a < 1$, alors $\ln a < 0$ et la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
Si $a > 1$, alors $\ln a > 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln a = +\infty$, d'où par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln a} = +\infty$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln a = -\infty$,	Si $0 < a < 1$, alors $\ln a < 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln a = -\infty$, d'où par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln a} = 0$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln a = +\infty$,

d'où par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln a} = 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) = (\sqrt{2})^x$	0	$+\infty$



d'où par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln a} = +\infty$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) = 0,8^x$	$+\infty$	0

