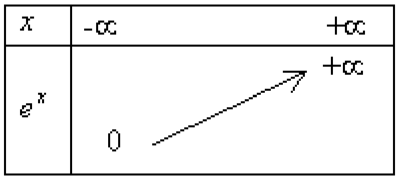
FONCTIONS LOGARITHMES



1) Propriété - définition

La fonction exponentielle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$.

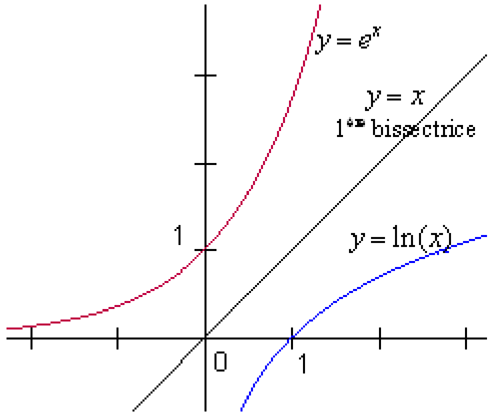
Autrement dit, pour tout $k \in]0;+\infty[$, l'équation k $e^x = k$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

Cette solution est appelée logarithme népérien de *k*, et noté $\ln k$. Autrement dit :

2) Définition et premières proprités :

La fonction logarithme népérien notée ln, est la fonction qui à tout réel $x > 0$ associe le réel $\ln(x)$ dont l'exponentielle est *x*. Ainsi, ln(1)=0 car $e^0 = 1$ et et ln(e)=1 car $e^1 = e$

3) Lien avec la fonction exponentielle



On a l'équivalence : $\left.\begin{matrix} y = \exp(x) \\ y > 0 \;,\; x \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x = \ln y \\ y > 0 \;,\; x \in \mathbb{R} \end{matrix}\right.$

Autrement dit, les courbes représentatives C_f et C_g des fonctions $f : x \to \ln x$ et $g : x \to e^x$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (première bissectrice)

En effet,

$$M(x;y) \in C_f \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y = \exp(x) \\ y > 0 \;,\; x \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x = \ln y \\ y > 0 \;,\; x \in \mathbb{R} \end{matrix}\right. \Leftrightarrow M(y;x) \in C_g$$

De plus,

Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$ et pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$

On dit que la fonction ln est la **bijection réciproque** définie sur $]0;+\infty[$ de la fonction exp.

4) Propriétés algébriques :

Les propriétés suivantes sont fondamentales et caractéristiques de la fonction logarithme

Pour tous nombres *a* et *b* strictement positifs :

1) $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln(a_i)$

2) $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$ et $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

3) $\ln\left(a^r\right) = r \ln a$ (pour tout rationnel *r*) (ce dernier résultat est très utilisé dans des problèmes d'ordre financier)

Cas particulier : Pour *a*>0, $\sqrt{a} = (a)^{\frac{1}{2}}$ donc $\boxed{\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a}$

Preuves

1) Notons $a = e^x, x \in \mathbb{R}$ et $b = e^y, y \in \mathbb{R}$. On a alors $x = \ln(a)$ et $y = \ln(b)$, d'où on déduit :

$a \times b = e^x \times e^y = e^{x+y}$ donc $\ln(a \times b) = x + y = \ln(a) + \ln(b)$

Par récurrence : si *n*=1, le résultat $\ln\left(\prod_{i=1}^{1} a_i\right) = \sum_{i=1}^{1} \ln(a_i)$ est évident, et si pour une certaine valeur $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln(a_i)$, alors $\ln\left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i\right) = \ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \times a_{n+1}\right) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) + \ln(a_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} \ln(a_i) + \ln(a_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \ln(a_i)$

2) D'une part, $\ln\left(b \times \frac{1}{b}\right) = \ln(1) = 0$, et d'autre part, $\ln\left(b \times \frac{1}{b}\right) = \ln(b) + \ln\left(\frac{1}{b}\right)$. On a donc l'égalité $\ln(b) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$. Enfin, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

jgcuaz@hotmail.com

3) Notons $a = e^x, x \in \mathbb{R}$. On a alors $x = \ln(a)$. Soit $r \in \mathbb{Q}$. On a donc $a^r = \left(e^x\right)^r = e^{rx}$ (d'après les propriétés algébriques de la fonction exponentielle), donc $\ln\left(a^r\right) = rx = r\ln(a)$

Equation fonctionnelle :
La fonction logarithme vérifie donc l'équation fonctionnelle $f(x \times y) = f(x) + f(y)$

5) Propriétés analytiques :
De la symétrie des deux courbes par rapport à la première bissectrice, on tire :

Propriété :
La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Preuves :
Preuve 1 : Notons $a = e^x, x \in \mathbb{R}$ et $b = e^y, y \in \mathbb{R}$. On a alors $x = \ln(a)$ et $y = \ln(b)$
De la stricte croissance de la focntion exponentielle, on déduit :
$a < b \Leftrightarrow e^x < e^y$
$\Leftrightarrow x < y$ (car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$)
$\Leftrightarrow \ln(a) < \ln(b)$ par définition
Preuve 2 :
A partir du calcul de la dérivée

Corollaire :
Si a et b sont deux réels strictement positifs, $a < b \Leftrightarrow \ln(a) < \ln(b)$
En particulier, puisque ln(1)=0,
$0 < a < 1 \Leftrightarrow \ln(a) < 0$ et $a > 1 \Leftrightarrow \ln(a) > 0$

Propriétés : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln x = -\infty$

Preuve :
1) Pour tout nombre A fixé (si grand soit-il), il suffit de prendre $x > e^A$ pour assurer $\ln x > A$
2) Pour la deuxième limite, il suffit de poser $X = \frac{1}{x}$. On a alors $\ln(X) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \Leftrightarrow \ln(x) = -\ln(X)$
Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} X = +\infty$ on a alors $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln(X) = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} -\ln(X) = -\infty$, c'est-à-dire $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln x = -\infty$

Propriété : La fonction $f : x \mapsto f(x) = \ln x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Preuve : Pour tout $a > 0$, on a

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(a+h) - \ln a}{a+h-a} = \lim_{k\to l} \frac{k-l}{e^k - e^l} = \lim_{k\to l} \frac{1}{\frac{e^k - e^l}{k-l}} = \frac{1}{\left(e^l\right)'} = \frac{1}{e^l} = \frac{1}{a}, \text{ avec } \begin{cases} k = \ln(a+h) \\ l = \ln(a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^k = a+h \\ e^l = a \end{cases}$$

Conséquence :
Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$, donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Corollaire :
La fonction ln est continue sur $]0;+\infty[$.

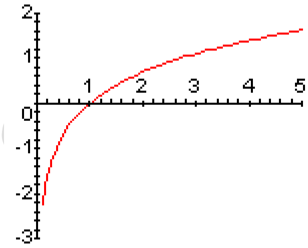
 jgcuaz@hotmail.com

<u>Nouvelle définition :</u>

On peut définir la fonction ln comme la fonction, définie sur $]0;+\infty[$, qui s'annule en 1 et dont la dérivée est la fonction inverse. On dit que la fonction ln est la PRIMITIVE de la fonction inverse, sur $]0;+\infty[$, qui s'annule en 1

On retrouve avec cette nouvelle définition toutes les propriétés analytiques annoncée ci-dessus

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$		$+$	
$f(x)$	‖	$-\infty$ ↗	0	↗	$+\infty$



<u>6) Dérivée d'une fonction composée avec le logarithme</u>

<u>Théorème :</u>

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que, pour tout x de I, on ait $u(x)$ strictement positive ; alors :

La fonction ln u est dérivable sur I et la dérivée de ln u est $\dfrac{u'}{u}$

Ce théorème s'utilise aussi dans l'autre sens :

Une primitive d'une fonction de la forme $\dfrac{u'}{u}$ sera $\ln|u| = \ln u$ si u est strictement positive.

<u>7) Limites particulières</u>

Outre les limites $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, on a également :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, et quel que soit le réel $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0$, et quel que soit le réel $\alpha > 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\alpha \ln x = 0$

(on retiendra qu'en présence d'une expression où se mêlent polynômes et logarithmes, ce sont toujours les expressions polynomiales « qui l'emportent »)

<u>Démonstration</u>

1) Pour tout $x\in]1;+\infty[$, on pose $f(x) = \ln(x) - 2\sqrt{x}$. f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme différence de deux fonctions qui le sont, et pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1-\sqrt{x}}{x}$. Ainsi, pour tout $x\in]1;+\infty[$, $\sqrt{x} > 1$ donc $f'(x) < 0$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $]1;+\infty[$. Ainsi, pour tout $x\in]1;+\infty[$, $f(x) < f(1)$.

Puisque $f(1) = \ln(1) - 2\sqrt{1} = -2 < 0$, o nen déduit que pour tout $x\in]1;+\infty[$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 2\sqrt{x}$.

Ainsi, pour tout $x\in]1;+\infty[$, $0 < \dfrac{\ln(x)}{x} < \dfrac{2\sqrt{x}}{x}$, c'est-à-dire $0 < \dfrac{\ln(x)}{x} < \dfrac{2}{\sqrt{x}}$. Mais puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$, le théorème des gendarmes nous permet de conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Soit $\alpha > 0$

Posons $X = x^\alpha$. Puisque $x\in]0;+\infty[$, on a alors $x = X^{\frac{1}{\alpha}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} X = \lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln X^{\frac{1}{\alpha}}}{X} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\ln X}{X} = 0$ d'après le résultat précédent.

jgcuaz@hotmail.com

2) Si on pose $X=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x=\frac{1}{X}$, on a alors $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} X=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$, et on aura donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\ln x=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{1}{X}\ln\frac{1}{X}=\lim\limits_{X\to+\infty}-\frac{\ln X}{X}=0$

Posons $X=x^{\alpha}$. Puisque $x\in\left]0;+\infty\right[$, on a alors $x=X^{\frac{1}{\alpha}}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} X=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^{\alpha}=0$

De plus $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^{\alpha}\ln x=\lim\limits_{X\to 0} X\ln X^{\frac{1}{\alpha}}=\lim\limits_{X\to 0}\frac{1}{\alpha}X\ln X=0$ d'après le résultat précédent.

8) Puissance d'un nombre positif, fonction puissance réelle

Lorsque a est un nombre strictement positif, pour tout entier relatif n, on a $\ln(a^n)=n\ln a$; donc $a^n=\exp(\ln(a^n))=e^{n\ln a}$

De même, on définit :

Définition :
Pour tout nombre réel a>0, et pour tout nombre réel b, on **définit** le réel a^b comme $a^b=e^{b\ln a}$

Cette définition généralise celle connue pour des exposants entiers naturels, relatifs ou rationnels d'un nombre strictement positif. Elle répond donc au problème posé dans le paragraphe 1

Propriétés :
Les règles de calcul connues dans le cas d'exposants entiers s'étendent aux exposants non entiers :
Pour tous réels a>0 et a'>0, et pour tous réels b et b' :

$1^b=1$ $\quad a^b a^{b'}=a^{b+b'}$ $\quad (aa')^b=a^b a'^b$ $\quad \left(a^b\right)^{b'}=a^{bb'}$ $\quad \frac{a^b}{a^{b'}}=a^{b-b'}$ $\quad \frac{a^b}{a'^b}=\left(\frac{a}{a'}\right)^b$

Preuves :
Pour tous réels a>0 et a'>0, et pour tous réels b et b' :

$$1^b=e^{b\ln(1)}=e^{b\times 0}=e^0=1$$
$$a^b a^{b'}=e^{b\ln a}\times e^{b'\ln a}=e^{b\ln a+b'\ln a}=e^{(b+b')\ln a}=a^{b+b'}$$
$$(aa')^b=e^{b\ln(a\times a')}=e^{b[\ln a+\ln a']}=e^{b\ln a+b\ln a'}=e^{b\ln a}e^{b\ln a'}=a^b a'^b$$
$$\left(a^b\right)^{b'}=\left(e^{b\ln a}\right)^{b'}=e^{b'\ln\left(e^{b\ln a}\right)}=e^{b'b\ln a}=a^{bb'}$$
$$\frac{a^b}{a^{b'}}=\frac{e^{b\ln a}}{e^{b'\ln a}}=e^{b\ln a-b'\ln a}=e^{(b-b')\ln a}=a^{b-b'}$$
$$\frac{a^b}{a'^b}=\frac{e^{b\ln a}}{e^{b\ln a'}}=e^{b\ln a-b\ln a'}=e^{b(\ln a-\ln a')}=e^{b\ln\left(\frac{a}{a'}\right)}=\left(\frac{a}{a'}\right)^b$$

Etude des fonctions puissance réelle :

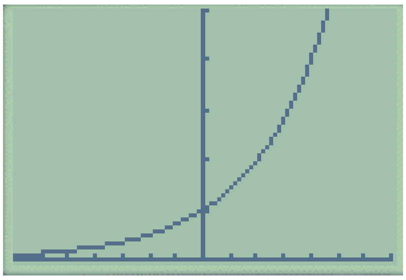
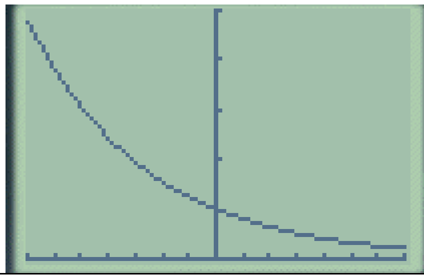
Pour tout réel a>0, on peut donc définir la fonction puissance $\begin{array}{l} f\ :\ \mathbb{R}\to\left]0;+\infty\right[\\ \quad x\to f(x)=a^x=e^{x\ln a}\end{array}$

La dérivée de f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x)=(\ln a)e^{x\ln a}$

Comme $e^{x\ln a}>0$ pour tout réel x, on en déduit que f' est du signe de $\ln a$.

jgcuaz@hotmail.com

Ainsi :

<table>
<tr><td>Si $a > 1$, alors $\ln a > 0$ et la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$</td><td>Si $0 < a < 1$, alors $\ln a < 0$ et la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>Si $a > 1$, alors $\ln a > 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln a = +\infty$, d'où par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x \ln a} = +\infty$, et $\lim\limits_{x \to -\infty} x \ln a = -\infty$, d'où par composition, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x \ln a} = 0$</td><td>Si $0 < a < 1$, alors $\ln a < 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln a = -\infty$, d'où par composition, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x \ln a} = 0$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln a = +\infty$, d'où par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x \ln a} = +\infty$</td></tr>
<tr><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$</td><td>$0 \nearrow +\infty$</td></tr></table>
</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x) = 0{,}8^x$</td><td>$+\infty \searrow 0$</td></tr></table>
</td></tr>
</table>

jgcuaz@hotmail.com