# Les « PRIMITIVES » dôune fonction

## I – Notion de primitive

**Définition 1:** On appelle **primitive d'une fonction** $f$ définie sur un intervalle I une fonction $F$ dérivable sur I telle que :

$$\forall x \in \mathrm{I}, F'(x) = f(x)$$

Exemple de primitive

La fonction $F : x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 2x$.

La fonction $F$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction $G : x \mapsto x^2 - 2$ est aussi une primitive de $f$. En effet, $G'(x) = f(x)$.

**Propriété 1:** Si $F$ est une primitive de $f$ sur I alors toutes les primitives de $f$ sont les fonctions $G$ définies sur I par :

$$\forall x \in \mathrm{I}, G(x) = F(x) + c \text{ , } c \in \mathbb{R}$$

Remarque : Il existe une **unique primitive** $G$ de $f$ sur I telle que $G(x_0) = y_0$ , $x_0 \in \mathrm{I}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

Calcul d'une primitive particulière

La fonction $F : x \mapsto x^2 + 1$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $G$ la primitive de la fonction $f$ qui s'annule lorsque $x = 1$ (c'est à dire $G(1) = 0$).

D'après la propriété 1, Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $G(x) = F(x) + c$ , $c \in \mathbb{R}$ donc $G(x) = x^2 + 1 + c$.

De plus, $G$ s'annule lorsque $x = 1$ donc $G(1) = 1^2 + 1 + c = 0$ donc $c = -2$.

Conclusion : Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $G(x) = x^2 + 1 - 2 = x^2 - 1$.

## II – Calcul de primitive

### 1 - Cas d'une primitive simple

| Fonction $f$ | Primitive $F$ | Définie sur I |
|---|---|---|
| $x \mapsto k$, $k \in \mathbb{R}$ | $x \mapsto kx$ | $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ |
| $x \mapsto x^n$ , $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ | $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ | $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ , $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ | $x \mapsto \dfrac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$ | $\mathrm{I} = ]-\infty;0[ \cup ]0;+\infty[$ |
| $x \mapsto e^x$ | $x \mapsto e^x$ | $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ | $x \mapsto \ln x$ | $\mathrm{I} = ]0;+\infty[$ |
| $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $x \mapsto \sqrt{x}$ | $\mathrm{I} = ]0;+\infty[$ |

Méthode de calcul d'une primitive simple

Calculer une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ sur $[1;2]$.

1) Quelle formule de primitive faut-il utiliser ?

Ici, on reconnaît la forme $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ avec $n = 3$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ est $x \mapsto \dfrac{-1}{(n-1)\,x^{n-1}}$.

2) On calcule $F$ primitive de $f$.

$\forall x \in [1;2],\ F(x) = \dfrac{-1}{(3-1)\,x^{3-1}} = \dfrac{-1}{2x^2}$.

## 2 - Cas d'une primitive complexe

| **Fonction** | **Primitive** |
|---|---|
| $u'+v'$ | $u+v$ |
| $ku'$ | $ku,\ k \in \mathbb{R}$ |
| $\dfrac{-u'}{u^2}$ | $\dfrac{1}{u}$ |
| $u'u^n$ , $n \in \mathbb{N},\ n \neq 0$ | $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$ |
| $\dfrac{-u'}{u^n}$ , $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ | $\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$ |
| $u'e^u$ | $e^u$ |
| $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ | $\sqrt{u}$ |

Méthode de calcul d'une primitive complexe

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto (2x+1)^3$. On appelle $F$ une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.

1) Quelle formule de primitive faut-il utiliser ?

Ici, celle qui semble adaptée est : $u'u^n$ avec $u = 2x+1$ et $n = 3$.

2) On calcule $u'$.

$u' = 2$ donc $u'u^n = 2(2x+1)^3$

3) On calcule la constante $k$ telle que $f = ku'u^n$.

$f = ku'u^n$ signifie que $(2x+1)^3 = k \times 2 \times (2x+1)^3$ donc $1 = k \times 2$ soit $k = \dfrac{1}{2}$

4) On calcule $F$ primitive de $f$.

$f = ku'u^n$ donc $F = k \times \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$ donc $F(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{(2x+1)^{3+1}}{3+1} = \dfrac{(2x+1)^4}{8}$

Remarques : • Pour être sûr que $F$ est bien une primitive de $f$, il suffit de vérifier que $F' = f$.

• Certaines fonctions comme $x \mapsto e^{-x^2}$ n'ont pas de primitive explicite.

**Propriété 2:** Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

## III – Extension de la notion d'intégrale

**Propriété 3:** Si $F$ est une primitive d'une fonction continue $f$ sur un intervalle $[a,b]$ alors :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Calcul d'une intégrale

Calculer $\int_1^2 x^2 dx$

Soit la fonction $f : x \mapsto x^2$. La fonction $f$ est continue sur $[1;2]$.

1) Quelle formule de primitive faut-il utiliser ?

Ici, celle qui semble adaptée est : $x \mapsto x^n$ avec $n = 2$.

2) On calcule $F$ primitive de $f$.

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x^3}{3}$$

3) On calcule l'intégrale.

$$\int_1^2 x^2 dx = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}\ u.a$$

**Propriété 4:** Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$.

- $\int_a^a f(x)dx = 0$ et $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- Si $f \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- Si $f \geq g$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Positivité de l'intégrale

- $F$ est dérivable sur $[a,b]$ telle que $F'(x) = f(x) \geq 0$ donc $F$ est croissante sur $[a,b]$
  donc $a \leq b \Rightarrow F(a) \leq F(b) \Rightarrow F(b) - F(a) \geq 0$
- $f \geq g \Leftrightarrow f - g \geq 0$ donc on obtient $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx \geq 0$ soit $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

**Propriété 5:** Soit $f$ et $g$ des fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ et $\alpha$ un réel.

- $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$

## IV – Valeur moyenne d'une fonction

**Définition 2:** On appelle **valeur moyenne d'une fonction** $f$ continue sur un intervalle $[a,b]$ le nombre :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Interprétation graphique de la valeur moyenne

La valeur moyenne de la fonction est la hauteur du rectangle de base $b-a$ qui a la même aire que le domaine limité par la courbe, la droite $y=0$, et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.