Démonstration par récurrence

Soit une propriété P_n qui dépend d'un entier naturel n et qu'il faut démontrer « POUR TOUT n »

Principe de la démonstration par récurrence :

- **INITIALISATION** : On vérifie que la propriété est vraie au rang 0 (ou au rang n_0)
- **HEREDITE** : On suppose que la propriété est vraie à un rang n donné quelconque et on démontre qu'elle reste vraie au rang $n+1$ (ou avec n tel que $n \geq n_0$)
- **CONCLUSION** : On peut alors conclure que la propriété P_n est vraie quelque soit l'entier naturel n (ou $\forall\, n \geq n_0$ si l'initialisation concerne le rang n_0)

Exemple : Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad (1+x)^n \geq 1+nx$

Soit P_n la propriété *« Pour un certain entier n non nul* $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad (1+x)^n \geq 1+nx$ »

INITIALISATION : Vérifions que cette propriété est vraie pour $n=1$

En effet on a bien $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad (1+x)^1 = 1+x \geq 1+1\times x$

HEREDITE : Pour un entier $n \neq 0$ donné , démontrons que si P_n est vraie alors P_{n+1} est également vraie

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ **Supposons que** $(1+x)^n \geq 1+nx$ **et démontrons que** $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad 1+x>0$ on a $(1+x)^n \geq 1+nx \Leftrightarrow (1+x)^n \times (1+x) \geq (1+nx)\times(1+x)$

c'est-à-dire $(1+x)^{n+1} \geq 1+x+nx+nx^2$ c'est-à-dire $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad nx^2 \geq 0$ on obtient que $1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$

ET on obtient bien que $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

On vient de démontrer l'hérédité c'est-à-dire $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ pour un rang $n \neq 0$ donné quelconque

CONCLUSION : La propriété $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad (1+x)^n \geq 1+nx$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice n° 1 : Démontrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 1+\dfrac{1}{1+u_n}$

vérifie $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq u_n \leq 2$

Exercice n° 2 : Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2$ *alors* $n^3 - n$ *est un multiple de 3*

Piste de travail : *un entier m est un multiple de 3* $\Leftrightarrow$ $\exists k \in \mathbb{N}$ *tel que m=3k*