CORRECTION Calcul d'une intégrale d'une fonction sur un intervalle [a , b] via le calcul d'une PRIMITIVE

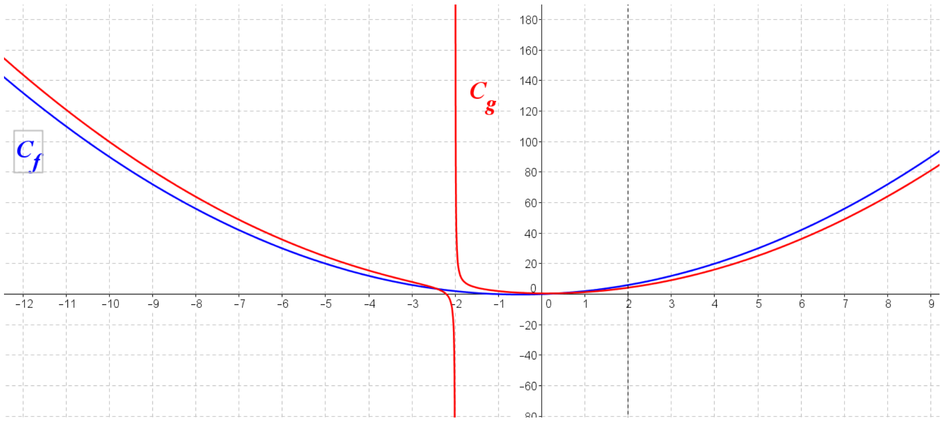
Formule à connaitre :

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Correction de l'exercice

Soit $\boldsymbol{f}$ *et* $\boldsymbol{g}$ *définies par*

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + x \\ g(x) = x^2 + \dfrac{2}{x+2} \end{cases}$$



C_f ***est la courbe en couleur bleu***

C_g ***est la courbe en couleur rouge***

Ces 2 fonctions sont définies et continues sur [0 , 2] et donc sont intégrables sur [0 , 2]

Cherchons à calculer **une primitive F** de f afin de calculer $\displaystyle\int_0^2 f(x)\ dx$

et une primitive G de g afin de calculer $\displaystyle\int_0^2 g(x)\ dx$

Calcul des 2 intégrales $\int_0^2 f(x)\ dx$ ***et*** $\int_0^2 g(x)\ dx$ *(via le calcul d'une primitive)*

- **Comme une primitive** de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + k$

$$\int_0^2 f(x)\ dx = F(2) - F(0) = \left(\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + k\right) - \left(\frac{0^2}{3} + \frac{0^2}{2} + k\right) = \frac{14}{3}$$

- **Comme une primitive** de g sur [0 , 2] est la fonction G définie par

$$G(x) = \frac{x^3}{3} + 2\ln(x+2) + k$$

$$\int_0^2 g(x)\ dx = G(2) - G(0) = \left(\left(\frac{2^3}{3} + 2\ln(4) + k\right) - \left(\left(\frac{0^3}{3} + 2\ln(2) + k\right)\right)\right) = \frac{2^3}{3} + 2\ln(4) - 2\ln(2)$$

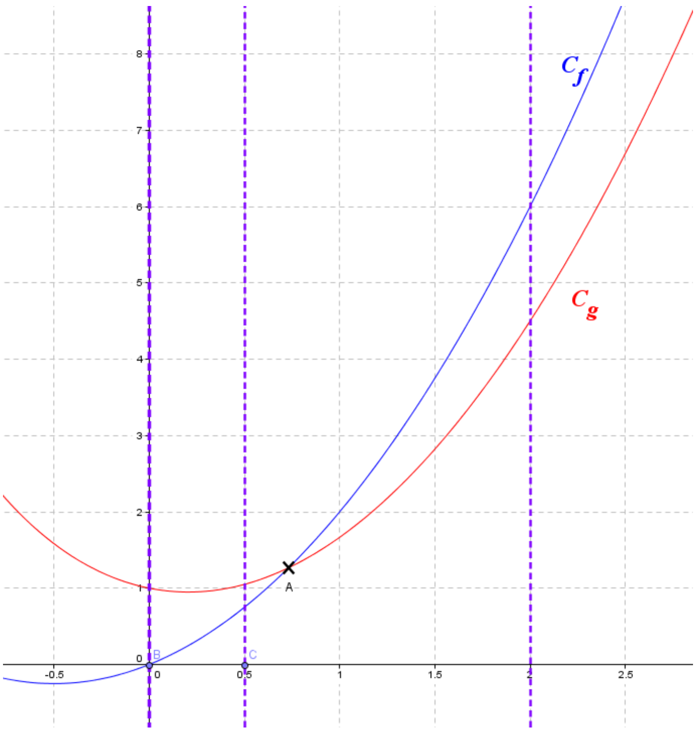
$$= \frac{8}{3} + 2\ln\left(2^2\right) - 2\ln(2) = \frac{8}{3} + 4\ln(2) - 2\ln(2) = \frac{8}{3} + 2\ln(2)$$

Zoom de la représentation graphique pour $x \in \left[\frac{-1}{2}, \frac{5}{2} \right]$ des fonctions f et de g

- ***la courbe en couleur bleu*** C_f : représentation graphique de la fonction définie par $f(x) = x^2 + x$
- ***la courbe en couleur rouge*** C_g **:** représentation graphique de la fonction définie par $g(x) = x^2 + \frac{2}{x+2}$

Calculons l'aire de l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $\begin{cases} 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ f(x) \le y \le g(x) \end{cases}$

c'est-à-dire l'aire entre les courbes C_f et C_g pour $x \in \left[0, \frac{1}{2} \right]$ c.à.d $\int_0^{\frac{1}{2}} \left[g(x) - f(x) \right] dx$



$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left[g(x) - f(x) \right] dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^2 + \frac{2}{x+2} \right) - \left(x^2 + x \right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{x+2} - x \ dx$$

$$= \left[2\ln(x+2) - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}} = 2\ln\left(\frac{1}{2} + 2 \right) - \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^2}{2} - 2\ln(0+2) + \frac{0^2}{2} = 2\ln\left(\frac{5}{2} \right) - \frac{1}{8} - 2\ln(2)$$

$$= 2\left(\ln(5) - \ln(2) \right) - 2\ln(2) - \frac{1}{8} = 2\ln(5) - 4\ln(2) - \frac{1}{8} = 2\ln\left(\frac{5}{4} \right) - \frac{1}{8}$$

Piste de travail Pour calculer l'aire entre les 2 courbes C_f et C_g quand $x \in [0, 2]$

Il est nécessaire de calculer l'abscisse du point $A \in C_f \cap C_g$ c'est-à-dire $x_A = \sqrt{3} - 1$

Réponse

$$A \in C_f \cap C_g \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x = x^2 + \frac{2}{x+2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2}{x+2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x - 2 = 0$$

C'est-à-dire $x = -1-\sqrt{3}$ ou $x = -1+\sqrt{3}$

Pour calculer l'aire entre les 2 courbes C_f et C_g quand $x \in [\ 0\ ,2\ ]$

comme on a
$$\begin{cases} 0 \le x \le -1+\sqrt{3} \quad f(x) \le g(x) \quad \text{alors} \quad \displaystyle\int_0^{-1+\sqrt{3}} [\ g(x) - f(x)\ ]\ dx \\ -1+\sqrt{3} \le x \le 2 \quad g(x) \le f(x) \quad \text{alors} \quad \displaystyle\int_{-1+\sqrt{3}}^{2} [\ f(x) - g(x)\ ]\ dx \end{cases}$$

Cette aire est égale à $\displaystyle\int_0^{-1+\sqrt{3}} [\ g(x) - f(x)\ ]\ dx \ + \int_{-1+\sqrt{3}}^{2} [\ f(x) - g(x)\ ]\ dx$

C'est-à-dire $\displaystyle\int_0^{-1+\sqrt{3}} \frac{2}{x+2} - x\ dx \ + \int_{-1+\sqrt{3}}^{2} x - \frac{2}{x+2}\ dx$

$$= \left[2\,ln(x+2) - \frac{x^2}{2} \right]_0^{-1+\sqrt{3}} + \left[\frac{x^2}{2} - 2\,ln(x+2) \right]_{-1+\sqrt{3}}^{2}$$

$$= 2\,ln\left(-1+\sqrt{3}+2\right) - \frac{\left(-1+\sqrt{3}\right)^2}{2} - 2\,ln(0+2) + \frac{0^2}{2} \ + \ \frac{(2)^2}{2} - 2\,ln(2+2) - \left(\frac{\left(-1+\sqrt{3}\right)^2}{2} - 2\,ln\left(-1+\sqrt{3}+2\right) \right)$$

$$= 2\,ln\left(\sqrt{3}+1\right) - \frac{4-2\sqrt{3}}{2} - 2\,ln(2) + 2 - 2\,ln(4) - \frac{4-2\sqrt{3}}{2} + 2\,ln\left(\sqrt{3}+1\right)$$
$$= 4\,ln\left(\sqrt{3}+1\right) - 4 + 2\sqrt{3} - 6\,ln(2) + 2$$
$$= 4\,ln\left(\sqrt{3}+1\right) - 2 + 2\sqrt{3} - 6\,ln(2)$$