Exercices à travailler (niveau 2)

EXERCICE 1 (5 points) (commun à tous les candidats)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1) Soient A le point d'affixe $2-5i$ et B le point d'affixe $7-3i$.

Proposition 1 : Le triangle OAB est rectangle isocèle.

2) Soit (Δ) l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-i| = |z+2i|$.

Proposition 2 : (Δ) est une droite parallèle à l'axe des réels.

3) Soit $z = 3 + i\sqrt{3}$.

Proposition 3 : Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur.

4) Soit z un nombre complexe non nul.

Proposition 4 : Si $\dfrac{\pi}{2}$ est un argument de z alors $|i+z| = 1 + |z|$.

5) Soit z un nombre complexe non nul.

Proposition 5 : Si le module de z est égal à 1 alors $z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ est un nombre réel.

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1) Proposition : Pour tout entier naturel n : $(1+i)^{4n} = (-4)^n$.

2) Soit (E) l'équation $(z-4)\left(z^2-4z+8\right) = 0$ où z désigne un nombre complexe.

Proposition : Les points dont les affixes sont les solutions, dans $\mathbb{C}$, de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.

3) Proposition : Pour tout nombre réel α, $1 + e^{2i\alpha} = 2e^{i\alpha}\cos(\alpha)$.

4) Soit A le point d'affixe $z_A = \dfrac{1}{2}(1+i)$ et M_n le point d'affixe $(z_A)^n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Proposition : si $n-1$ est divisible par 4, alors les points O, A et M_n sont alignés.

5) Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$.

Proposition : $1 + j + j^2 = 0$.