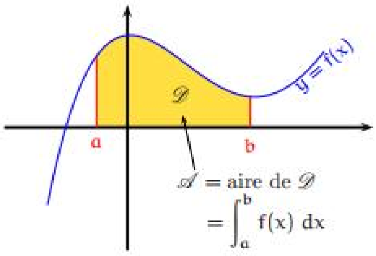
Fiche / résumé du cours sur le chapitre INTEGRALE

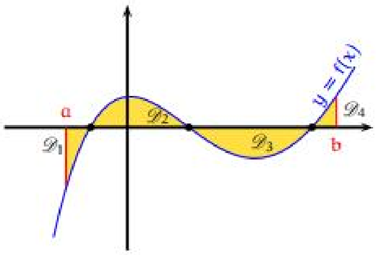
Définition de l'intégrale

Un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ étant fixé, l'unité d'aire est l'aire du carré OIKJ où $I(1,0)$, $K(1,1)$ et $J(0,1)$ (l'aire du carré OIKJ vaut 1 par définition).



f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$.
$\mathscr{D}$ est le domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de f.
L'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ est l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$ exprimée en unités d'aire.

Ce nombre est noté $\int_a^b f(x)\,dx$ car il est obtenu en ∫ommant les aires des rectangles de longueur $f(x)$ et de largeur infinitésimale dx quand x varie de a à b.



Si f n'est pas de signe constant sur $[a, b]$, l'intégrale de f sur $[a, b]$ est la différence de la somme des aires des domaines situés au-dessus de (Ox) et de la somme des aires des domaines situés au-dessous de (Ox).

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 - \mathscr{A}_3 + \mathscr{A}_4.$$

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$. La valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Propriétés de l'intégrale

• **Linéarité de l'intégrale**

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$. Alors $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

Soient f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et λ un réel. Alors $\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.

• **Positivité de l'intégrale, croissance de l'intégrale**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si a et b sont deux réels de I tels que $a \leqslant b$ et si pour tout réel x de $[a, b]$ on a $f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Si a et b sont deux réels de I tels que $a \leqslant b$ et si pour tout réel x de $[a, b]$ on a $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

• **Inégalité de la moyenne**

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$. Si m et M sont deux réels tels que pour tous réels x de $[a, b]$, on ait $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors $m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M$.

• **Relation de Chasles**

Convention : On pose $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ et $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous réels a, b et c de I, on a $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Calcul dõintégrales et PRIMITIVES

Primitives

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle primitive de la fonction f sur l'intervalle I toute fonction F définie et dérivable sur I telle que $F' = f$.

Expression d'une primitive à l'aide d'une intégrale

Théorème fondamental

- Si f est continue sur l'intervalle I, alors f admet des primitives sur I.
- Si F est une primitive de la fonction f sur l'**intervalle** I, les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto F(x) + C$ où C est une constante réelle.
- Si f est continue sur l'intervalle I alors, pour tout réel a de I, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I. Ainsi, pour tout réel x de I,

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x).$$

Plus précisément,

$$\text{la fonction } x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt \text{ est la primitive de } f \text{ sur I qui s'annule en } a.$$

- Si f est continue sur l'intervalle, pour tous réel x_0 de l'intervalle I et tout réel y_0, il existe une primitive F de f sur I et une seule telle que $F(x_0) = y_0$. La primitive de f qui prend la valeur y_0 en x_0 est la fonction

$$x \mapsto y_0 + \int_{x_0}^x f(t)\,dt.$$

Expression d'une intégrale à l'aide d'une primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit F une primitive de f sur I. Pour tous réels a et b de I,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Notation. Le nombre $F(b) - F(a)$ est noté $[F(x)]_a^b$.

Formule d'intégration par parties (Hors programme)

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I. On suppose que les fonctions dérivées u' et v' sont continues sur l'intervalle I. Alors, pour tous réels a et b de I,

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

Remarque. Si f est une fonction **continue** sur I, les notions d'intégrale et de primitive sont directement liées par la relation

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Mais il existe des fonctions dont on sait calculer l'intégrale et qui n'admettent pas de primitive. Les fonctions en escaliers fournissent des exemples de fonctions dont on sait calculer l'intégrale sans pouvoir fournir de primitives.