CONTINUITÉ ET CALCUL DE DÉRIVÉES

1. FONCTIONS CONTINUES

DÉFINITION

Une fonction définie sur un intervalle I est ***continue*** sur I si l'on peut tracer sa courbe représentative *sans lever le crayon*

EXEMPLES

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles sont continues sur chaque intervalle contenu dans leur ensemble de définition.
- La fonction *racine carrée* est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- Les fonctions *sinus* et *cosinus* sont continues sur $\mathbb{R}$.

THÉORÈME

Si f et g sont continues sur I, les fonctions $f+g$, kf ($k \in \mathbb{R}$) et $f \times g$ sont continues sur I.

Si, de plus, g ne s'annule pas sur I, la fonction $\frac{f}{g}$, est continue sur I.

THÉORÈME (LIEN ENTRE CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ)

Toute fonction **dérivable** sur un intervalle I est **continue** sur I.

REMARQUE

Attention! La réciproque est fausse.

Par exemple, la fonction valeur absolue ($x \mapsto |x|$) est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier mais n'est pas dérivable en 0.

PROPRIÉTÉ (LIEN ENTRE CONTINUITÉ ET LIMITE)

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, alors pour tout $\alpha \in [a;b]$:

$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \lim_{x \to \alpha^-} f(x) = \lim_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$.

EXEMPLE

Montrons à l'aide de cette propriété que la fonction «partie entière» (notée $x \mapsto E(x)$), qui à tout réel x associe le plus grand entier inférieur ou égal à x, n'est pas continue en 1.

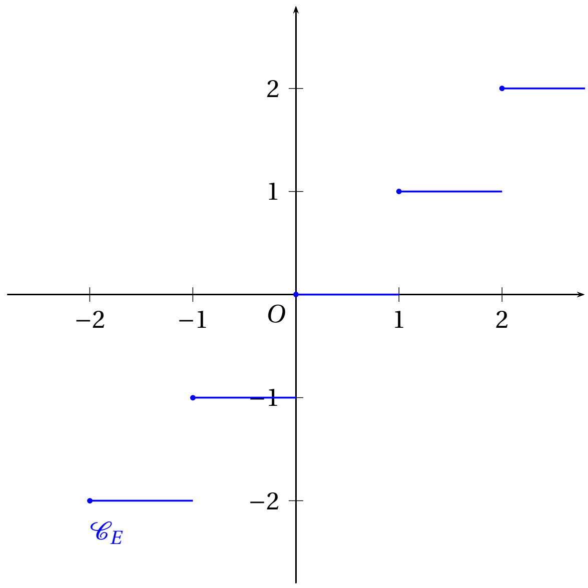
Si x est un réel positif et strictement inférieur à 1, sa partie entière vaut 0.

Donc $\lim\limits_{x \to 1^-} E(x) = 0$.

Par ailleurs, la partie entière de 1 vaut 1 c'est à dire $E(1) = 1$.

Donc $\lim\limits_{x \to 1^-} E(x) \neq E(1)$.

La fonction « partie entière » n'est donc pas continue en 1 (en fait, elle est discontinue en tout point d'abscisse entière).



Fonction « partie entière »

2. THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

Si f est une fonction **continue** sur un intervalle $[a; b]$ et si y_0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = y_0$ admet **au moins une** solution sur l'intervalle $[a; b]$.

REMARQUES

- Ce théorème dit que l'équation $f(x) = y_0$ admet **une ou plusieurs solutions** mais ne permet pas de déterminer le nombre de ces solutions. Dans les exercices où l'on recherche le nombre de solutions, il faut utiliser le corollaire ci-dessous.
- **Cas particulier fréquent :** Si f est continue et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, l'équation

$f(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[a; b]$ (en effet, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$).

COROLLAIRE (DU THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES)

Si f est une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a; b]$ et si y_0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = y_0$ admet une **unique** solution sur l'intervalle $[a; b]$.

REMARQUES

- Ce dernier théorème est aussi parfois appelé **"Théorème de la bijection"**
- Il faut vérifier **3 conditions** pour pouvoir appliquer ce corollaire :
  - — f est continue sur $[a; b]$;
  - — f est strictement croissante ou strictement décroissante sur $[a; b]$;
  - — y_0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
- Les deux théorèmes précédents se généralisent à un intervalle ouvert $]a; b[$ où a et b sont éventuellement infinis. Il faut alors remplacer $f(a)$ et $f(b)$ (qui ne sont alors généralement pas définis) par $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x)$

EXEMPLE

Soit une fonction f définie sur $]0; +\infty[$ dont le tableau de variation est fourni ci-dessous :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	1

On cherche à déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -1$.

L'unique flèche oblique montre que la fonction f est **continue** et **strictement croissante** sur $]0; +\infty[$.

-1 est compris entre $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Par conséquent, l'équation $f(x) = -1$ admet une **unique** solution sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

3. CALCUL DE DÉRIVÉES

Le tableau ci-dessous recense les dérivées usuelles à connaitre en Terminale S. Pour faciliter les révisions, toutes les formules du programme ont été recensées ; certaines seront étudiées dans les chapitres ultérieurs.

DÉRIVÉE DES FONCTIONS USUELLES

Fonction	Dérivée	Ensemble de dérivabilité
k $(k \in \mathbb{R})$	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N})$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$]0;-\infty[$

PROPRIÉTÉ

Soient une fonction f définie et dérivable sur un certain intervalle et a et b deux réels.

Alors la fonction $g : x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable là où elle est définie et :

$$g'(x) = af'(ax+b).$$

EXEMPLES

- La fonction $f : x \mapsto (5x+2)^3$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
  $f'(x) = 5 \times 3(5x+2)^2 = 15(5x+2)^2$.
- En particulier, si $g(x) = f(-x)$ on a $g'(x) = -f'(-x)$.
  Par exemple la dérivée de la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est la fonction $x \mapsto -e^{-x}$.

REMARQUE

Le résultat précédent se généralise à l'aide du théorème suivant :

THÉORÈME (DÉRIVÉES DES FONCTIONS COMPOSÉES)

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et prenant ses valeurs dans un intervalle J et soit f une fonction dérivable sur J.

Alors la fonction $g : x \mapsto f(u(x))$ est dérivable sur I et :

$$g'(x) = u'(x) \times f'(u(x)).$$

EXEMPLES

Soit u une fonction dérivable sur intervalle I :

- la fonction u^n est dérivable sur I et sa dérivée est $u' \times nu^{n-1}$;
- la fonction $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur la partie de I où $u \neq 0$ et sa dérivée est $-\dfrac{u'}{u^2}$;
- la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur la partie de I où $u > 0$ et sa dérivée est $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$;
- la fonction $\sin(u)$ est dérivable sur I et sa dérivée est $u' \times \cos(u)$;
- la fonction $\cos(u)$ est dérivable sur I et sa dérivée est $-u' \times \sin(u)$;
- la fonction e^u est dérivable sur I et sa dérivée est $u' \times e^u$;
- la fonction $\ln(u)$ est dérivable sur la partie de I où $u > 0$ et sa dérivée est $\dfrac{u'}{u}$.