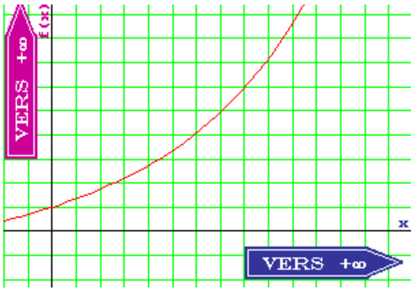
Limites et Continuité
Terminale S

Soit f une fonction numérique définie sur D_f, de courbe représentative C_f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I LIMITES EN L'INFINI

a) Limite infinie

Par exemple, considérons la fonction f dont la courbe représentative est :



Lorsque **x** s'en va vers $+\infty$., **f(x)** devient de plus en plus grand. il n'a aucun maximum. On dit alors que **f(x)** tend vers $+\infty$.
Ou que la **limite** de la fonction **f** lorsque **x** tend vers $+\infty$.est égale à $+\infty$.

Ce que l'on résume par : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

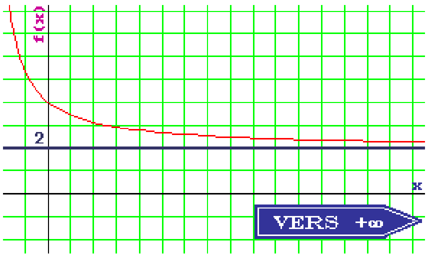
Définition : Si pour tout réel A , il existe un réel B tel que pour tout x > B on a f(x)> A alors on dit que f(x) tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Propriété : La droite (d) d'équation y = ax + b est une **asymptote oblique** à la courbe représentative C_f de la fonction f au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (ax+b) = 0$

Définition et propriété équivalentes pour une limite en $-\infty$.
Remarque: On étudie **la position de la courbe C_f par rapport à la droite (d) en étudiant le signe de f(x) – (ax+b).** On pourra faire un tableau de signes.

b) Limite finie

Considérons maintenant la fonction **f** dont la courbe représentative est :



Lorsque **x** s'en va vers $+\infty$, **f(x)** se rapproche de plus en plus de **2**.
On dit alors que **f(x)** tend vers **2**.
Ou que la **limite** de la fonction **f** lorsque **x** tend vers $+\infty$ est égale à **2**.

Ce que l'on résume par : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

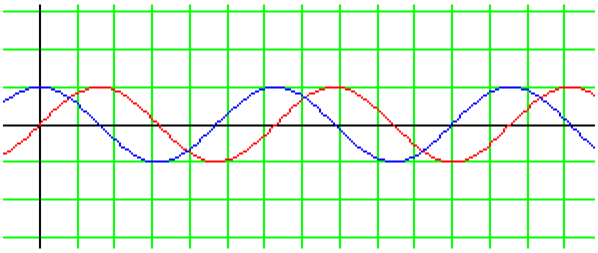
Définition : On dit que f(x) tend vers un réel ℓ lorsque x tend vers $+\infty$, si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les réels f(x) pour x assez grand.

Propriété : La droite (d) d'équation y = b est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative C_f de la fonction f au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$

Définition et propriété équivalentes pour une limite en $-\infty$.

c) Sans limite !

Toutes les fonctions n'admettent pas nécessairement une limite lorsque x tend vers $+\infty$. C'est par exemple le cas avec les fonctions sinus et cosinus :



Lorsque x s'en va vers $+\infty$, **sinus** et **cosinus** hésitent quant à l'attitude à adopter. Oscillant à jamais, ils n'ont aucune limite finie ou infinie...

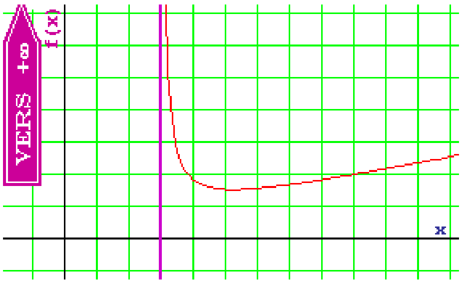
II LIMITES EN UN POINT

1. **Propriété** : Pour tout réel a et pour toute fonction f définie en a , si f admet une limite en a alors elle est unique et égale à f(a). $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
2. **Limite finie** : Dire que f admet une limite L en a , c'est dire que f(x) peut être rendu aussi proche que l'on veut de L à condition que x soit suffisamment proche de a .

Définition : f admet pour limite L en a si pour tout intervalle I ouvert contenant L, il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que I contient tous les f(x) pour x appartenant à J et à D_f .

3. **Limite infinie** :

Par exemple, considérons la fonction f définie sur l'intervalle $]3;+\infty[$ dont la courbe représentative est :



Lorsque **x** se rapproche de **3**, **f(x)** devient de plus en plus grand sans qu'aucun plafond ne l'arrête. On dit alors que **f(x)** tend vers $+\infty$. Ou que la **limite** de la fonction **f** lorsque **x** tend vers **3** est égale à $+\infty$.

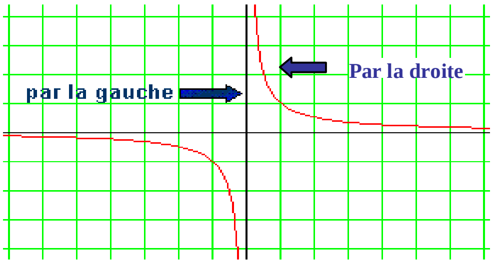
Ce que l'on résume par : $\boxed{\lim\limits_{x \to 3} f(x) = +\infty}$

Définition :Dire que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a , c'est dire que f(x) peut être rendu aussi grand que l'on veut à condition que x soit suffisamment proche de a. notation $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

Propriété : La droite (d) d'équation x = a est une **asymptote verticale** à la courbe représentative C_f de la fonction f si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

4. **Limite à gauche et limite à droite.**

Exemple Dans ce qui suit, **f** désignera la fonction inverse. Ainsi pour tout x : f(x) = $\frac{1}{x}$



La fonction inverse **f** est définie sur l'intervalle $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

On a alors : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

La fonction inverse n'admet pas de limite en 0.

Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant a, mais qui n'est pas définie en a, alors, f possède une limite en a si et seulement si elle possède une limite à gauche et une limite à droite et si celles ci sont égales.

III LIMITES DES FONCTIONS DE REFERENCE

Fonction	Ensemble de définition	Limite en $-\infty$	Limite en 0	Limite en $+\infty$
x	$]-\infty ; +\infty[$	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$]-\infty ; +\infty[$	$+\infty$	0	$+\infty$
x^3	$]-\infty ; +\infty[$	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$	0	$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$	0
$\sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$	N'existe pas	0	$+\infty$
sin(x) cos(x)	$]-\infty ; +\infty[$	N'existe pas	0 1	N'existe pas

IV OPERATIONS SUR LES LIMITES

1. Limite d'une somme

De manière générale, la limite de la somme de deux fonctions est égale à la somme des limites de celles-ci. Sauf cas particuliers !

Limite de f	Limite de g	Limite de f + g
L	L'	L + L'
L	$+\infty$	$+\infty$
L	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Indéterminé

2. Limite d'un produit

Limite de f	Limite de g	Limite de f x g
L	L'	L x L'
L	∞	∞ (signe à voir)
∞	∞	∞ (signe à voir)
0	∞	Indéterminé

3. Limite d'un quotient

Limite de f	Limite de g	Limite de f / g
L	L'	L / L'
L	∞	0
∞	L	∞ (signe à voir)
∞	∞	Indéterminé
1	0	∞
∞	0	∞ (signe à voir)
0	0	Indéterminé

4. Limite d'une fonction composée.

Théorème : Soit *f* et *g* deux fonctions. a, L et L' trois réels éventuellement égaux à +/– ∞

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ et $\lim\limits_{x\to L} g(x)=L'$ alors $\lim\limits_{x\to a} gof(x)=L'$

Exemple : $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin(2x+\pi)=0$ car $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} 2x+\pi=2\pi$ et $\lim\limits_{x\to 2\pi} \sin(x)=\sin(2\pi)=0$

5. Théorème des gendarmes. A démontrer

Si pour tout x appartenant à un intervalle du type $[\alpha;+\infty[$ on a : $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=L$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=L$

V CONTINUITE

1. Définition : Soit une fonction numérique f et a un réel. On dit que f est continue en a si $a \in D_f$ et si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Définition : Soit une fonction numérique f définie sur un intervalle **I**, on dit que **f est continue sur I** si f est continue en tout point a de **I**.

Graphiquement, cela signifie que sa représentation graphique ne présente aucun point de rupture : on peut la tracer sans lever le crayon.

2. Propriétés :

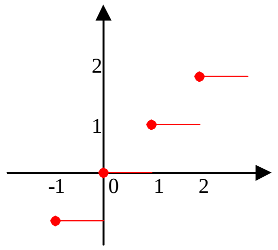
Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.
Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.
La fonction racine carrée est continue sur $[0;+\infty[$.

3. Opérations :

Si u et v sont continues sur I, alors $u + v$, $u \times v$ et u^n (n entier naturel non nul) sont continues sur I. $\frac{u}{v}$ est continue sur les intervalles où elle est définie.
Si la fonction f est continue en a et si la fonction g est continue en $f(a)$ alors la fonction $g \circ f$ est continue en a.

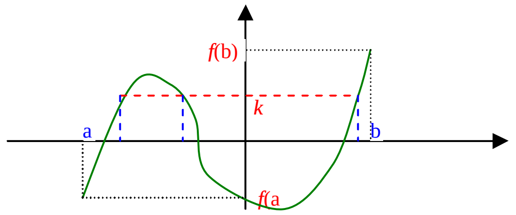
4. Contre exemple : La fonction Partie Entière

La fonction partie entière, notée E est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par **:E(x) est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.**
Par conséquent, si x désigne un réel et n un entier relatif, $E(x)=n$ si et seulement si $n \leq x < n+1$



Exemples : •E(4) = 4
•E(6, 2) = 6
•E(-2) = -2
•E(-4, 3) = -5
La fonction partie entière n'est pas continue en 1 mais est continue sur $[0;1[$.

5. Théorème des Valeurs Intermédiaires : (admis)



Si la fonction f est définie et continue sur un intervalle **I**, si a et b sont deux valeurs de **I** et k un réel tel que : $f(a) < k < f(b)$; alors il existe au moins un réel c tel que $f(c) = k$.

6. Théorème de la bijection : à démontrer

Si la fonction ***f* est continue et strictement monotone** sur l'intervalle $[a ; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, **l'équation *f*(*x*) = *k*   a une solution unique** dans $[a ; b]$. On dit que ***f* réalise une bijection** de $[a ; b]$ sur $[f(a) ; f(b)]$ ou $[f(b) ; f(a)]$ selon que f est croissante ou décroissante.

Cas particulier : Si f réalise une bijection (donc toutes les conditions précédentes) et que $f(a)f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ a une solution et une seule dans I.

Application : approximation des solutions d'une équation .
Diverses méthodes : par balayage (tableur) ou par dichotomie ;

7. Bijection réciproque :

Définition : Soit A et B 2 ensembles quelconque et f une fonction numérique définie sur A et à valeurs dans B.
On dit que **f est une bijection de A sur B si pour tout y de B , il existe un unique x de A tel que f(x) = y.**
(tout élément de B admet un unique antécédent dans A)
La fonction qui a y de B associe son unique antécédent x de A est appelée **bijection réciproque** de f et est notée f^{-1}.

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Théorème (admis) : Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle **I** est une bijection de **I** sur J = f(I) .   La bijection réciproque f^{-1} est aussi continue sur J et est monotone et de même sens de variation que f .
Les courbes C_f et C_f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x dans un repère orthonormé.