# Chapitre II : Continuité

## 1 Langage de la continuité

### 1.1 Définition

$f$ est une fonction définie sur un intervalle $I$ et $a$ un réel de $I$.

- Dire que $f$ est continue en $a$ signifie que $f$ admet une limite en $a$ égale à $f(a)$. ($\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$)
- Dire que $f$ est continue sur $I$ signifie que $f$ est continue en tout réel de $I$.

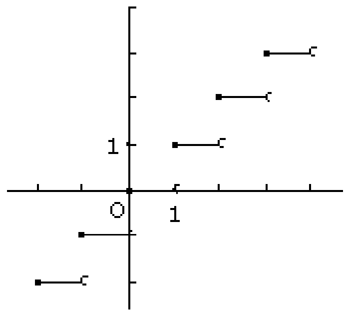
Remarque : $f$ est continue en $a$ si et seulement si : $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$.

Exemple : $f$ est la fonction définie sur $I = ]1; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.
La fonction $f$ est continue en 2 car $f(2) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$.
Plus généralement, la fonction $f$ est continue sur $I$.

Remarque : Graphiquement cela signifie que l'on peut tracer la courbe représentative de $f$ sur l'intervalle $I$ sans avoir à lever le crayon.

### 1.2 contre-exemple : la fonction partie entière

La fonction partie entière, notée $E$, est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
$E(x)$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $x$.
Par conséquent, si $x$ désigne un réel et $n$ un entier relatif,
$E(x) = n$ si et seulement si $n \leq x < n+1$.

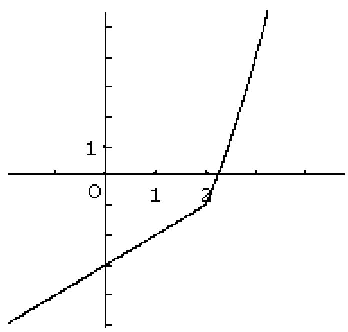



Exemples :
- $E(4) = 4$ car $4 \leq 4 < 5$
- $E(6,2) = 6$ car $6 \leq 6,2 < 7$
- $E(-2) = -2$ car $-2 \leq -2 < -1$
- $E(-4,3) = -5$ car $-5 \leq -4,3 < -4$

### 1.3 Continuité des fonctions usuelles

- Les fonctions polynômes, sinus et cosinus, la fonction valeur absolue sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction racine carrée est continue sur $[0; +\infty[$.
- Les fonctions construites par opérations ou par composition à partir des précédentes sont continues sur les intervalles qui forment leur ensemble de définition, c'est le cas en particulier des fonctions rationnelles, et de la fonction $x \longmapsto \tan x$.

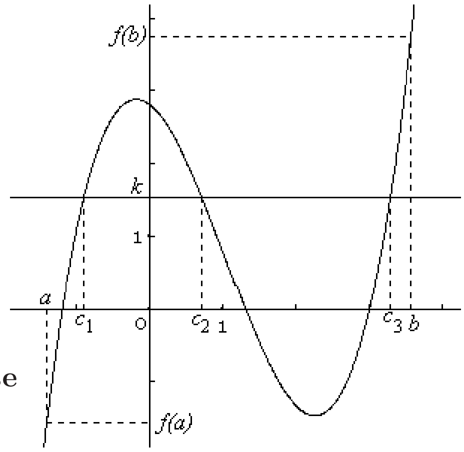
Exemple : Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x - 3 & \text{si} \quad x < 2 \\ f(x) = x^2 - 5 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$




- $f$ est une fonction affine sur l'intervalle $]-\infty; 2[$, elle est donc continue sur $]-\infty; 2[$.
- $f$ est une fonction polynôme sur l'intervalle $]2; +\infty[$, elle est donc continue sur $]2; +\infty[$.
- Pour démontrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, il suffit alors de prouver qu'elle est continue en 2, c'est à dire que :
$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = f(2)$$
Or $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} x - 3 = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} x^2 - 5 = -1$.
Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = -1$
et $f$ est bien continue sur $\mathbb{R}$.

# 2 Théorème des valeurs intermédiaires

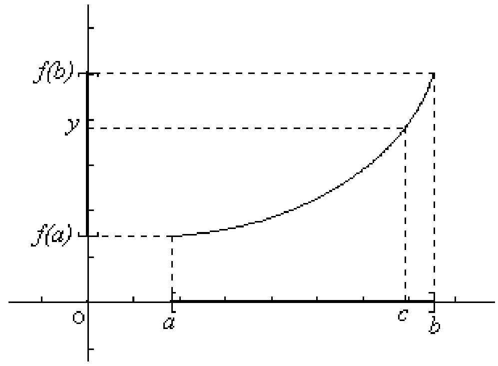
## 2.1 le théorème et un corollaire




Théorème : Soit $f$ une fonction définie et continue sur un intervalle $I$.
Soient $a$ et $b$ deux réels appartenant à $I$.
Pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c$ compris entre $a$ et $b$ tel que $f(c) = k$.

Corollaire : Si $f$ est une fonction **continue et strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**) sur l'intervalle $I = [a; b]$ :

1. l'image de $I$ par $f$ est l'intervalle $[f(a); f(b)]$ (resp. $[f(b); f(a)]$) ;
2. pour tout $y$ dans $[f(a); f(b)]$ (resp. $[f(b); f(a)]$), l'équation $f(x) = y$, d'inconnue $x$, a **une solution et une seule** dans $I$.




Démonstration : on ne démontrera ce corollaire que dans le cas où $f$ est strictement croissante.

1. Puisque $f$ est strictement croissante sur $I$, pour tout réel $x$ dans $I$, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.
   Donc toute image $f(x)$, c'est à dire tout nombre de $f(I)$, est dans $[f(a); f(b)]$. **Réciproquement**, si $y$ est dans $[f(a); f(b)]$, $y$ est l'image par $f$ d'au moins un réel $c$ de $I$ (théorème des valeurs intermédiaires), donc $y$ est dans $f(I)$.
2. En outre, l'équation $f(x) = y$ ne peut avoir deux solutions car $f$ étant strictement croissante, deux nombres distincts ont des images distinctes.

## 2.2 utilisation du théorème ou du corollaire

Soit l'équation $g(x) = 2$ où $g$ est la fonction dont on donne ci-dessous le tableau de variation.

| $x$ | -7 | | -1 | | 3 | | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g$ | 5 | ↘ | -1 | ↗ | 10 | ↘ | 5 |

– Sur l'intervalle $[-7; -1]$, $g$ est continue et strictement décroissante ;
  $g(-7) = 5$ et $g(-1) = -1$, alors $2 \in [g(-1); g(-7)]$ et par conséquent, l'équation $g(x) = 2$ admet une unique solution dans $[-7; -1]$.
– Sur l'intervalle $[-1; 3]$, $g$ est continue et strictement croissante ;
  $g(-1) = -1$ et $g(3) = 10$, alors $2 \in [g(-1); g(3)]$ et par conséquent, l'équation $g(x) = 2$ admet une unique solution dans $[-1; 3]$.
– Sur l'intervalle $[3; 9]$, $g$ est continue et strictement décroissante ; or $2 < g(9)$ ;
  donc l'équation $g(x) = 2$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $[3; 9]$.

**Conclusion** : L'équation $g(x) = 2$ admet deux solutions dans $[-7; 9]$.

## 2.3 notion de fonction réciproque

$f$ est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $I$ quelconque.
Posons $J = f(I)$. $J$ est un intervalle. Alors :
– pour tout réel $x$ de $I$, $f(x)$ est dans $J$ ;
– pour tout réel $y$ de $J$, il existe un $x$ et **un seul** tel que $f(x) = y$.
Lorsque ces deux conditions sont réunies, on dit que $f$ est une **bijection de $I$ sur $J$**.
On peut alors définir une fonction $g$ sur $J$ de la manière suivante :
si $y$ est un réel de $J$ tel que $y = f(x)$, alors on pose $g(y) = x$.
On dit que $g$, définie sur $J$, est la **fonction réciproque** de $f$ .

On dit aussi que $g$ est la **bijection réciproque** de $f$.
Il en résulte que pour tout réel $x$ de $I$, $g(f(x)) = x$ et pour tout $y$ de $J$, $f(g(y)) = y$.

Remarque : La fonction réciproque de $g$ est la fonction $f$.