Méthode

Calcul de limites

Dans de nombreux calculs de limites, l'application des théorèmes généraux (limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient) ne permet pas de conclure directement. On dit alors qu'on est en présence d'une « forme indéterminée ». Dans la plupart des cas il est possible, en modifiant l'écriture de l'expression dont on cherche la limite, de se retrouver dans une situation où l'on peut conclure en appliquant les théorèmes connus: on dit alors que l'on a *levé l'indétermination.*

Les formes indéterminées au programme sont au nombre de quatre :

- une pour la somme, symbolisée par « $\infty - \infty$ » ;
- une pour le produit, symbolisée par « $0 \times \infty$ » ;
- deux pour le quotient , symbolisées par « $\frac{0}{0}$ » et « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

ATTENTION !
Dans un calcul de limite il est indispensable , avant de chercher à modifier une écriture, de s'assurer que les théorèmes généraux ne permettent pas de conclure directement.
Pour tous les exemples qui suivent, nous supposerons cette étape franchie.

A) Forme indéterminée symbolisée par « $\infty - \infty$ ».

Méthode générale : factoriser le terme prépondérant pour faire apparaître des formes de limite connue.

Exemple 1

Limite en $+\infty$ de f définie par ***$f(x) = 2x^3 - 5x + 1$***

Dans une fonction polynôme, le terme prépondérant au voisinage de l'infini est le terme de plus haut degré.

Pour $x > 0$, $f(x) = 2x^3\left(1 - \frac{5}{2x^2} + \frac{1}{2x^3}\right)$.

En modifiant l'écriture de f(x) nous avons fait apparaître des formes de limites connues. Nous pouvons maintenant conclure à l'aide des théorèmes généraux:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{2x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^3} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{5}{2x^2} - \frac{1}{2x^3}\right) = 1$.

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$. Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

D'une manière générale on démontre que la limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fonction polynôme est la même que celle de son terme de plus haut degré.

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^3-5x^2+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3=+\infty$.

Exemple 2

*Limite en $+\infty$ de f définie par **$f(x) = x - \sqrt{x}$***

Pour $x>0$, $f(x)=x(1-\dfrac{\sqrt{x}}{x})=x(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}})$ car pour $x>0$, $x=(\sqrt{x})^2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}})=1$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ on déduit $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Exemple 3

*Limite en $+\infty$ de f définie par **$f(x) = \sqrt{4x^2+1} - x$***

Pour $x>0$, $\sqrt{4x^2+1}=\sqrt{4x^2(1+\dfrac{1}{4x^2})}=\sqrt{4x^2}\ \sqrt{1+\dfrac{1}{4x^2}}=|2x|\ \sqrt{1+\dfrac{1}{4x^2}}$.

Donc pour $x>0$, $f(x)=2x\ \sqrt{1+\dfrac{1}{4x^2}}-x=x\ (2\ \sqrt{1+\dfrac{1}{4x^2}}-1)$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(2\ \sqrt{1+\dfrac{1}{4x^2}}-1)=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Exemple 4

*Limite en $+\infty$ de f définie par **$f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$***

Une factorisation identique à celle de l'exercice précédent ne nous permet pas de conclure. En effet: pour $x>0$, $f(x)=x\ (\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1)$ et l'application des théorèmes nous raméne à une autre forme indéterminée « $\infty\times 0$ ».

*** *Voici une technique très utilisée pour modifier l'écriture d'une fonction irrationnelle.*

Multiplions et divisons f(x) par son expression conjuguée $\sqrt{x^2+1}+x$ (on fait ainsi apparaître au numérateur l'identité remarquable $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$) :

pour $x>0$, $f(x)=\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\dfrac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

Exemple 5

*Limite en $+\infty$ de f définie par **$f(x) = x + 1 - \ln x$***

Pour $x > 0$, $f(x) = x(1 + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x})$.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} (1 + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}) = 1$.

D'autre part $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$. Alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Exemple 6

*Limite en 0 de f définie par **$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$***

Pour $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{x}(1 + x\ln x)$.

Or $\lim_{x\to0} x\ln x = 0$ donc $\lim_{x\to0} (1 + x\ln x) = 1$. Comme $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, on a $\lim_{x\to0} f(x) = +\infty$.

Exemple 7

*Limite en $+\infty$ de f définie par **$f(x) = -x + e^{3x}$***

Pour tout réel x,

$f(x) = e^{3x}(1 - \frac{x}{e^{3x}}) = e^{3x}(1 - xe^{-3x}) = e^{3x}[1 - \frac{1}{3}(3xe^{-3x})]$

Posons $y = 3x$. Alors $f(x) = e^{y}[1 - \frac{1}{3}(ye^{-y})]$. On a $\lim_{x\to+\infty} y = +\infty$ et

d'une part $\lim_{y\to+\infty} ye^{-y} = 0$ donc $\lim_{y\to+\infty} [1 - \frac{1}{3}(ye^{-y})] = 1$, d'autre part

$\lim_{y\to+\infty} e^{y} = +\infty$. Alors $\lim_{y\to+\infty} e^{y}[1 - \frac{1}{3}(ye^{-y})] = +\infty$ et donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

B) Forme indéterminée symbolisée par « $0 \times \infty$ ».

Méthode générale: développer l'expression pour faire apparaître des formes de limite connue.

Exemple 8

*Limite en $+\infty$ de f définie par **$f(x) = \frac{1}{x}(1 + \sqrt{x})$***

Développons : pour $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exemple 9

Limite en 0 de f définie par $f(x) = x \ln\frac{1}{x}$

Pour $x > 0$, $f(x) = x(-\ln x) = -x\ln x$.
Or $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Exemple 10

Limite en $+\infty$ *de f définie par* $f(x) = (x^2 + x)\, e^{-x}$

Pour tout réel x, $f(x) = x^2e^{-x} + xe^{-x}$. Or pour tout réel $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha}e^{-x} = 0$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = 0$. On en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exemple 11

Limite en $-\infty$ *de f définie par* $f(x) = e^{-x}\ln(1 + e^{x})$

Pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{\ln(1+e^x)}{e^x}$. Posons $Y = e^x$. Alors $f(x) = \dfrac{\ln(1+Y)}{Y}$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} Y = 0$ et $\lim\limits_{Y\to 0} \dfrac{\ln(1+Y)}{Y} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

Exemple 12

Limite en 0^+ *de f définie par* $f(x) = x\, e^{\frac{1}{x} - 1}$

Pour $x > 0$, $f(x) = x\, e^{\frac{1}{x}}\, e^{-1} = e^{-1}\, \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$. Posons $Y = \dfrac{1}{x}$. Alors $f(x) = e^{-1}\, \dfrac{e^{Y}}{Y}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} Y = +\infty$ et $\lim\limits_{Y\to+\infty} \dfrac{e^Y}{Y} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{Y\to+\infty} e^{-1}\, \dfrac{e^Y}{Y} = +\infty$ et alors $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

C) Forme indéterminée symbolisée par « $\frac{0}{0}$ ».

Méthode générale: simplifier par le facteur qui tend vers 0, ou bien faire apparaître des formes de limite connue.

Exemple 13

Limite en 2 de f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

Pour tout réel x, $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$ donc pour tout x de $\mathbb{R} - \{2\}$,

$f(x) = \dfrac{(x-2)(x+3)}{x-2} = x+3$ et $\lim\limits_{x\to 2}(x+3) = 5$ donc $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$.

Exemple 14

Limite en 1 de f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

Pour faire apparaître le facteur $x-1$ au numérateur, multiplions et divisons f(x) par la quantité conjuguée du numérateur.

Pour $x > 0$ et $x \neq 1$, $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \dfrac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$.

Or $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

Exemple 15

Limite en 0 de f définie par $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{x}$

Pour $x \neq 0$, $f(x) = 3\,\dfrac{\sin 3x}{3x}$. Posons $Y = 3x$. Alors $f(x) = 3\,\dfrac{\sin Y}{Y}$.

$\lim\limits_{x\to 0} Y = 0$ et $\lim\limits_{Y\to 0} \dfrac{\sin Y}{Y} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3 \times 1 = 3$.

Exemple 16

Limite en 0 de f définie par $f(x) = \dfrac{x\ln x}{\ln(x+1)}$

Pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{\dfrac{\ln(x+1)}{x}}$. Or $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

Exemple 17

Limite en 0 de f définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x + x^2}$

Pour $x \in \mathbb{R} - \{-1;0\}$, $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} \dfrac{1}{1+x}$. Or $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

D) Forme indéterminée symbolisée par « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Méthode générale: factoriser le terme prépondérant au numérateur et au dénominateur puis simplifier, ou bien faire apparaître des formes de limite connue.

Exemple 18

Limite en $-\infty$ *de f définie par* $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{5x + 4}$

f est une fonction rationnelle, c'est à dire un quotient de fonctions polynômes.

Pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{2x^2(1 + \frac{1}{2x} - \frac{3}{2x^2})}{5x(1 + \frac{4}{5x})} = \dfrac{2x}{5} \dfrac{(1 + \frac{1}{2x} - \frac{3}{2x^2})}{1 + \frac{4}{5x}}$.

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3}{2x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to -\infty} (1 + \dfrac{1}{2x} - \dfrac{3}{2x^2}) = 1$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{4}{5x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to -\infty} (1 + \dfrac{4}{5x}) = 1$.

D'autre part : $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x}{5} = -\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.

D'une manière générale on démontre que la limite en $+\infty$ *ou* $-\infty$ *d'une fonction rationnelle est la même que celle du quotient simplifié de ses termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.*

Ainsi : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2}{5x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x}{5} = -\infty$.

Exemple 19

Limite en $+\infty$ de f définie par $f(x) = \dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+4}$

Pour $x>0$, $f(x) = \dfrac{x+\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x+4} = \dfrac{x+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x+4} = \dfrac{x(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})}{x(1+\frac{4}{x})} = \dfrac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{4}{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{4}{x}) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

Exemple 20

Limite en $+\infty$ de f définie par $f(x) = \dfrac{\ln x+3}{\ln x-1}$

Pour $x>e$, $f(x) = \dfrac{\ln x(1+\frac{3}{\ln x})}{\ln x(1-\frac{1}{\ln x})} = \dfrac{1+\frac{3}{\ln x}}{1-\frac{1}{\ln x}}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$ donc

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{\ln x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x} = 0$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

Exemple 21

Limite en $+\infty$ de f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(2x+3)}{\ln x}$

Pour $x>1$, $f(x) = \dfrac{\ln[x(2+\frac{3}{x})]}{\ln x} = \dfrac{\ln x+\ln(2+\frac{3}{x})}{\ln x} = 1+\dfrac{\ln(2+\frac{3}{x})}{\ln x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(2+\frac{3}{x}) = 2$ et $\lim\limits_{Y\to2}\ln Y = \ln 2$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(2+\frac{3}{x}) = \ln 2$.

D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2+\frac{3}{x})}{\ln x} = 0$. Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

Exemple 22

Limite en $+\infty$ de f définie par $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$

Pour $x>0$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}\ \dfrac{x}{1+x^2}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exemple 23

Limite en $+\infty$ de f définie par $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{2e^x + 1}{e^x - 3}}$

Pour $x \neq \ln 3$, $f(x) = \dfrac{2e^x(1 + \frac{1}{2e^x})}{e^x(1 - \frac{3}{e^x})} = \dfrac{2(1 + \frac{1}{2e^x})}{1 - \frac{3}{e^x}}$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{e^x} = 0$. Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

Exemple 24

Limite en $+\infty$ de f définie par $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{x}}}$

Pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{e^x}{x^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ et pour tout réel α

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ et alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.