Calcul de limites

Dans de nombreux calculs de limites, l'application des théorèmes généraux (limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient) ne permet pas de conclure directement. On dit alors qu'on est en présence d'une « forme indéterminée ». Dans la plupart des cas il est possible, en modifiant l'écriture de l'expression dont on cherche la limite, de se retrouver dans une situation où l'on peut conclure en appliquant les théorèmes connus: on dit alors que l'on a *levé l'indétermination.*

Les formes indéterminées au programme sont au nombre de quatre :

- une pour la somme, symbolisée par « $\infty - \infty$ » ;
- une pour le produit, symbolisée par « $0 \times \infty$ » ;
- deux pour le quotient , symbolisées par « $\frac{0}{0}$ » et « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

ATTENTION !
Dans un calcul de limite il est indispensable , avant de chercher à modifier une écriture, de s'assurer que les théorèmes généraux ne permettent pas de conclure directement.
Pour tous les exemples qui suivent, nous supposerons cette étape franchie.

A) Forme indéterminée symbolisée par « $\infty - \infty$ ».

Exemple 1 Limite en $+\infty$ de f définie par $f(x) = 2x^3 - 5x + 1$

Exemple 2 Limite en $+\infty$ de f définie par $f(x) = x - \sqrt{x}$

Exemple 3 Limite en $+\infty$ de f définie par $f(x) = \sqrt{4x^2 + 1} - x$

Exemple 4 Limite en $+\infty$ de f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

Exemple 5 Limite en $+\infty$ de f définie par $f(x) = x + 1 - \ln x$

Exemple 6 Limite en 0 de f définie par $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$

Exemple 7 Limite en $+\infty$ de f définie par $f(x) = -x + e^{3x}$

B) Forme indéterminée symbolisée par « $0 \times \infty$ ».

Exemple 8 *Limite en* $+\infty$ *de f définie par* $f(x) = \frac{1}{x}(1 + \sqrt{x})$

Exemple 9 *Limite en 0 de f définie par* $f(x) = x \ln \frac{1}{x}$

Exemple 10 *Limite en* $+\infty$ *de f définie par* $f(x) = (x^2 + x)\, e^{-x}$

Exemple 11 *Limite en* $-\infty$ *de f définie par* $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^{x})$

Exemple 12 *Limite en* 0^+ *de f définie par* $f(x) = x\, e^{\frac{1}{x} - 1}$

C) Forme indéterminée symbolisée par « $\frac{0}{0}$ ».

Exemple 13 *Limite en 2 de f définie par* $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

Exemple 14 *Limite en 1 de f définie par* $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

Exemple 15 *Limite en 0 de f définie par* $f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$

Exemple 16 *Limite en 0 de f définie par* $f(x) = \frac{x \ln x}{\ln(x + 1)}$

Exemple 17 *Limite en 0 de f définie par* $f(x) = \frac{e^{x} - 1}{x + x^2}$

D) Forme indéterminée symbolisée par « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Exemple 18 Limite en $-\infty$ de f définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{5x + 4}$

Exemple 19 Limite en $+\infty$ de f définie par $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + 4}$

Exemple 20 Limite en $+\infty$ de f définie par $f(x) = \dfrac{\ln x + 3}{\ln x - 1}$

Exemple 21 Limite en $+\infty$ de f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(2x + 3)}{\ln x}$

Exemple 22 Limite en $+\infty$ de f définie par $f(x) = \dfrac{\ln x}{1 + x^2}$

Exemple 23 Limite en $+\infty$ de f définie par $f(x) = \dfrac{2e^x + 1}{e^x - 3}$

Exemple 24 Limite en $+\infty$ de f définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$