DROITES ET PLANS DANS L'ESPACE

1. RAPPELS SUR LES DROITES ET PLANS

PROPRIÉTÉ

Par deux points distincts de l'espace, il passe une et une seule droite.

REMARQUE

Dans les exercices où l'on cherche à déterminer une droite (par exemple, pour tracer l'intersection de deux plans), il suffira donc de trouver deux points distincts qui appartiennent à cette droite.

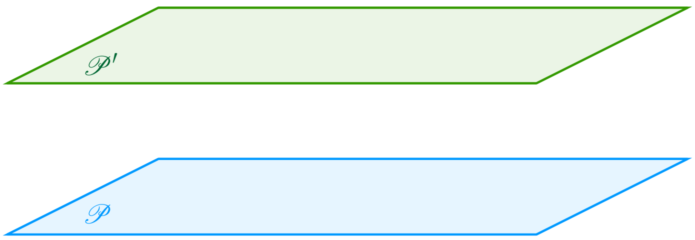
PROPRIÉTÉ

Par trois points distincts et **non alignés** de l'espace, il passe un et un seul plan.

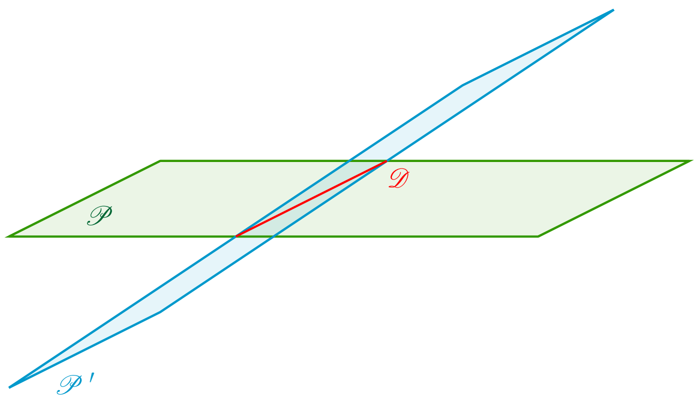
POSITIONS RELATIVES DE DEUX PLANS

Deux plans distincts de l'espace peuvent être :

- **strictement parallèles** : dans ce cas, ils n'ont aucun point commun
- **sécants** : dans ce cas, leur intersection est une droite



Plans parallèles



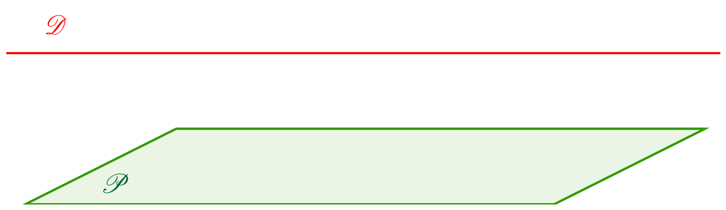
Plans sécants

POSITIONS RELATIVES D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

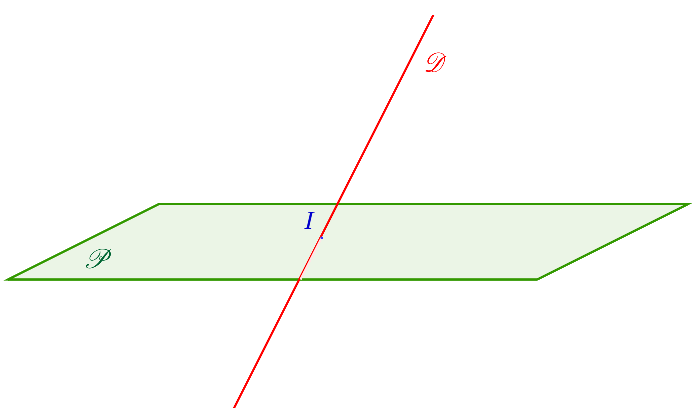
Soient $\mathscr{D}$ une droite et $\mathscr{P}$ un plan de l'espace.

La droite $\mathscr{D}$ peut être :

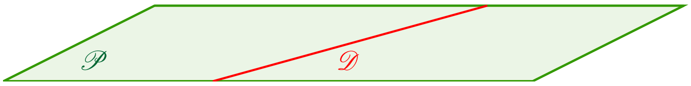
- **strictement parallèle** au plan $\mathscr{P}$: dans ce cas, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ n'ont aucun point commun
- **sécante** avec le plan $\mathscr{P}$: dans ce cas, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ ont un unique point commun
- **contenue** dans le plan $\mathscr{P}$



Droite strictement parallèle à un plan



Droite sécante à un plan



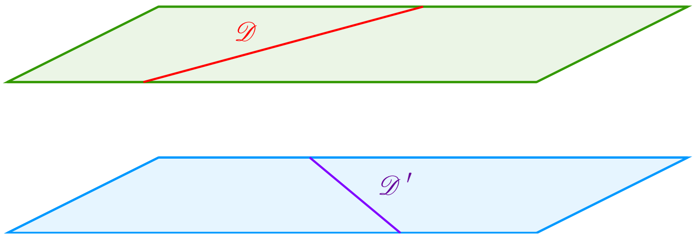
Droite contenue (incluse) dans un plan

POSITIONS RELATIVES DE DEUX DROITES

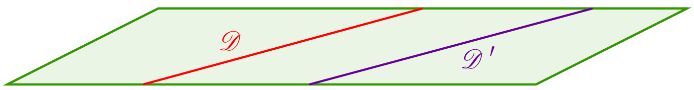
Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites distinctes de l'espace.

Ces droites peuvent être :

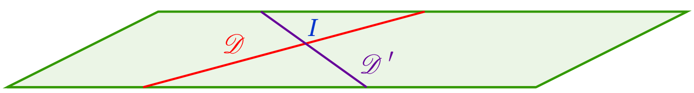
- **non coplanaires** : dans ce cas, elles n'ont aucun point commun
- **coplanaires**, c'est à dire contenues dans un même plan ; elles peuvent alors être :
  — **strictement parallèles** : dans ce cas, elles n'ont aucun point commun
  — **sécantes** : dans ce cas, leur intersection est un point



Droites non coplanaires



Droites strictement parallèles

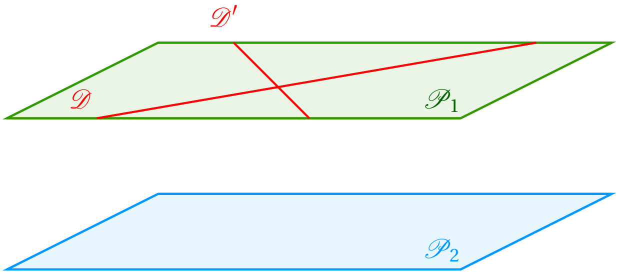


Droites sécantes

2. PARALLÉLISME

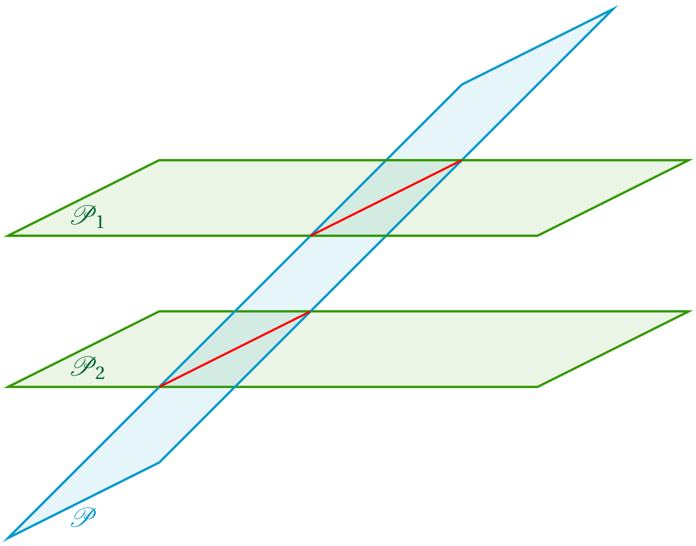
PROPRIÉTÉ

Si un plan $\mathscr{P}_1$ contient deux droites sécantes $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ parallèles à un plan $\mathscr{P}_2$, alors le plan $\mathscr{P}_1$ est parallèle au plan $\mathscr{P}_2$. .



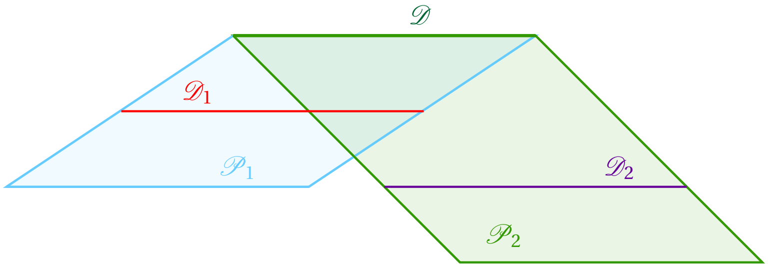
PROPRIÉTÉ

Si deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles, alors tout plan $\mathscr{P}$ sécant à $\mathscr{P}_1$ est sécant à $\mathscr{P}_2$ et leurs intersections sont deux droites parallèles.



PROPRIÉTÉ (THÉORÈME DU TOIT)

Si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont deux plans sécants et si une droite $\mathscr{D}_1$ incluse dans $\mathscr{P}_1$ est parallèle à une droite $\mathscr{D}_2$ incluse dans $\mathscr{P}_2$ alors la droite $\mathscr{D}$ intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ est parallèle à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.



3. VECTEURS DE L'ESPACE

DÉFINITION (VECTEURS COLINÉAIRES)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace. On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

REMARQUES

- Par convention, on considèrera que le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est colinéaire a n'importe quel vecteur de l'espace
- Intuitivement, deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même «direction» (mais pas nécessairement le même «sens»). La notion de vecteurs colinéaires est à rapprocher de la notion de droites parallèles (voir théorème ci-dessous).

PROPRIÉTÉ

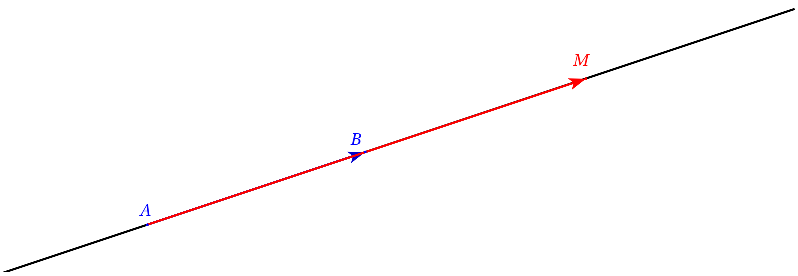
Soient quatre points distincts A, B, C et D.

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

PROPRIÉTÉ

Soient deux points distincts A et B.

Un point M appartient à la droite (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.



REMARQUE

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points distincts de la droite $\mathscr{D}$ est appelé **vecteur directeur** de $\mathscr{D}$.

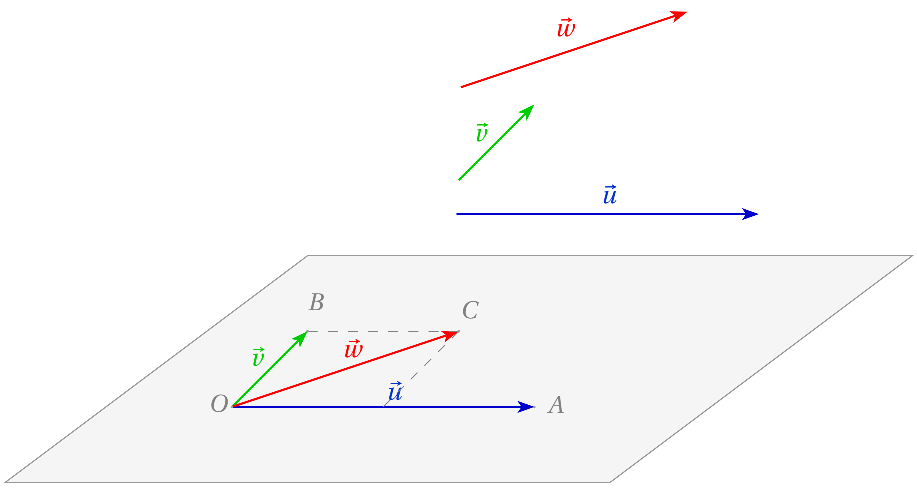
DÉFINITION (VECTEURS COPLANAIRES)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires. On dit que le vecteur $\vec{w}$ est coplanaires à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si il existe deux réels k et k' tels que :

$$\vec{w} = k\vec{u} + k'\vec{v}$$

REMARQUES

- Intuitivement, le fait que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient coplanaires signifie que si on choisit quatre points O, A, B, C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$ alors les points O, A, B et C appartiennent à un même plan.



(sur la figure ci-dessus $\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}$)

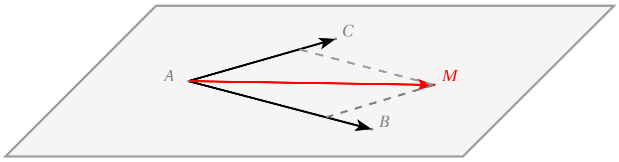
- La définition précédente peut se généraliser à plus de trois vecteurs. Pour **deux** vecteurs, par contre, elle n'a guère d'intérêt car deux vecteurs sont toujours coplanaires
- Pour des vecteurs ou des points coplanaires, on peut se placer dans le plan contenant ces points ou ces vecteurs et appliquer les résultats classiques de géométrie plane (théorème des milieux, théorème de Thalès, relation de Chasles, etc.)

PROPRIÉTÉ

Soient A, B, C trois points non alignés.

Le point M appartient au plan (ABC) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont coplanaires, c'est à dire si et seulement il existe deux réels k et k' tels que :

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + k'\overrightarrow{AC}$$

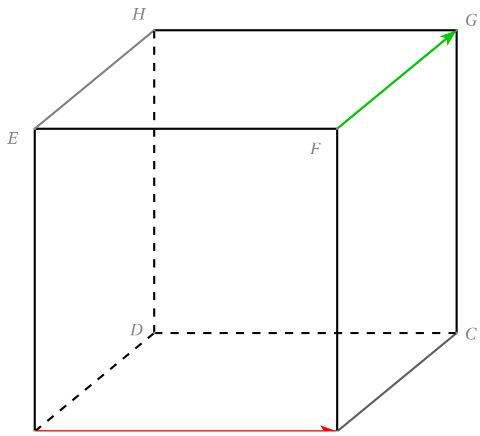


REMARQUE

Attention! Notez que dans la propriété ci-dessus, tous les vecteurs ont la même origine A.

Le fait que des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient coplanaires ne signifie pas que les points A, B, C, D soient coplanaires.

Par exemple, si on considère le cube ci-dessous, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont coplanaires (parce que $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AD}$ ou tout simplement parce que **deux** vecteurs sont toujours coplanaires!) mais les points A, B, F et G ne le sont pas.



Vecteurs coplanaires - Points non coplanaires

4. REPÉRAGE - REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES

DÉFINITION

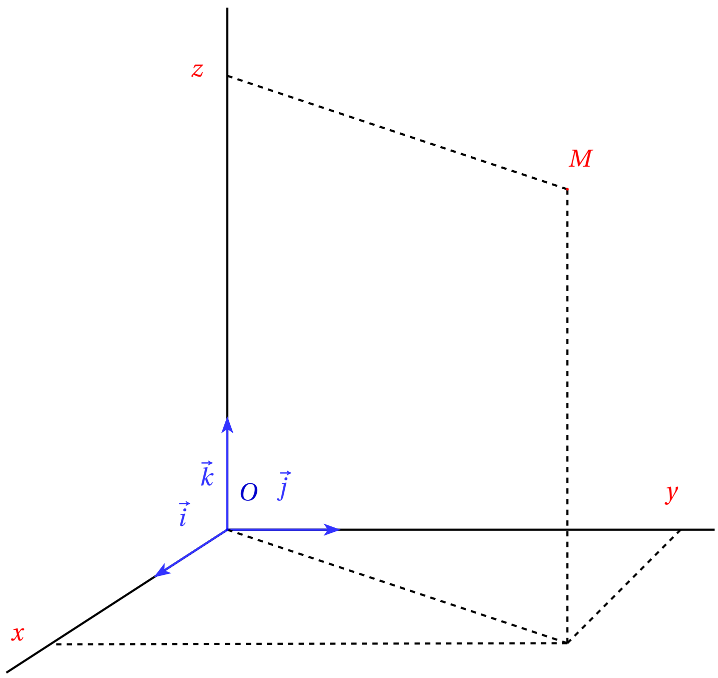
Un repère de l'espace est un quadruplet $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ où O est un point et $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ trois vecteurs **non coplanaires**.

DÉFINITION

Pour tout point M de l'espace, il existe trois réels x, y et z tels que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$(x\,;y\,;z)$ s'appellent les **coordonnées** de M dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$



REMARQUES

- x, y et z s'appellent respectivement l'**abscisse**, l'**ordonnée** et la **cote** du point M
- Comme dans le plan, on définit également les coordonnées d'un vecteur de la façon suivante : les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ sont les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

PROPRIÉTÉS

Pour tous points $A\left(x_A\,;y_A\,;z_A\right)$ et $B\left(x_B\,;y_B\,;z_B\right)$:

- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\left(x_B - x_A\,;y_B - y_A\,;z_B - z_A\right)$
- le point M milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\,;\dfrac{y_A + y_B}{2}\,;\dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$

REMARQUE

Les notions relatives aux repères orthonormés, distances, etc. sont abordées dans le chapitre «Orthogonalité et produit scalaire»

THÉORÈME ET DÉFINITION (REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE D'UNE DROITE)

Un point $M\left(x\,;y\,;z\right)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$ passant par $A\left(x_A\,;y_A\,;z_A\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(a\,;b\,;c)$ si et seulement si il existe un réel k tel que :

$$\begin{cases} x = x_A + ak \\ y = y_A + bk \text{ avec } k \in \mathbb{R} \\ z = z_A + ck \end{cases}$$

Ce système est appelé **représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$**

DÉMONSTRATION

Elle est immédiate en utilisant :

$M\left(x\,;y\,;z\right) \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\vec{u}$

REMARQUE

Une droite admet une infinité de représentations paramétriques

EXEMPLE

La droite passant par l'origine et de vecteur directeur $\vec{u}\,(1\,;1\,;1)$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = k \\ y = k \text{ avec } k \in \mathbb{R} \\ z = k \end{cases}$$

THÉORÈME ET DÉFINITION (REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE D'UN PLAN)

Soient $\mathscr{P}$ un plan passant par $A\left(x_A\,;y_A\,;z_A\right)$ et $\vec{u}\,(a\,;b\,;c)$ et $\vec{u}'\left(a'\,;b'\,;c'\right)$ deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

Un point $M\left(x\,;y\,;z\right)$ appartient au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si il existe deux réels k et k' tels que :

$$\begin{cases} x = x_A + ak + a'k' \\ y = y_A + bk + b'k' \\ z = z_A + ck + c'k' \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R} \text{ et } k' \in \mathbb{R}$$

Ce système est appelé **représentation paramétrique du plan** $\mathscr{P}$

DÉMONSTRATION

On utilise le fait que :

$M\left(x\,;y\,;z\right) \in \mathscr{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ est coplanaire à $\vec{u}$ et $\vec{u}' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\vec{u} + k'\vec{u}'$

REMARQUE

Là encore, un plan admet une infinité de représentations paramétriques

EXEMPLE

Le plan $\left(xOy\right)$ passe par l'origine et $\vec{i}\,(1\,;0\,;0)$ et $\vec{j}\,(0\,;1\,;0)$ sont deux vecteurs non colinéaires de ce plan. Une représentation paramétrique du plan $\left(xOy\right)$ est donc :

$$\begin{cases} x = k \\ y = k' \\ z = 0 \end{cases} \text{ avec } \left(k, k'\right) \in \mathbb{R}^2$$