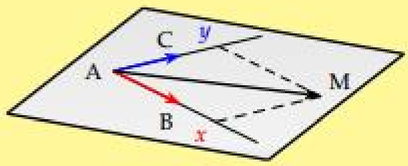
GEOMETRIE DANS LôESPACE

Théorème 10 : Un plan est engendré par deux vecteurs non colinéaires.

Le plan (ABC) est donc l'ensemble des points M tels que :

$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC} \quad (x;y) \in \mathbb{R}^2$

$(x;y)$ sont donc les coordonnées du point M dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ du plan (ABC)



Remarque : On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs directeurs du plan (ABC) ou forment une base pour le plan (ABC).

Définition 6 : Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si, on peut exprimer le vecteur $\vec{w}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$$\vec{u},\ \vec{v}, \vec{w} \text{ coplanaires} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad \vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$$

Théorème 12 : Les points A, B, C et D sont coplanaires si, et seulement si :

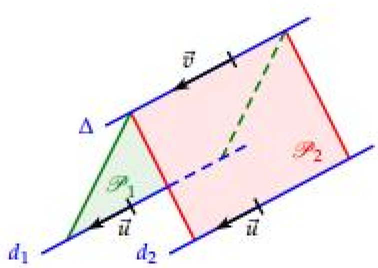
$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \overrightarrow{AD} = a\,\overrightarrow{AB} + b\,\overrightarrow{AC}$$

2.4 Le théorème du toit

Théorème 13 : Soient d_1 et d_2 deux droites parallèles contenues respectivement dans les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$. Si ces deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants en une droite Δ, alors la droite Δ est parallèle à d_1 et d_2.

Démonstration : Par l'absurde. On considère que Δ n'est pas paralléle à d_1 ce qui entraine que Δ n'est pas parallèle à d_2.
On appelle $\vec{v}$ un vecteur directeur de Δ

- Comme d_1 et d_2 sont parallèles, on appelle $\vec{u}$ leur vecteur directeur.
- Comme Δ n'est pas parallèle à d_1, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc, comme Δ est contenue dans $\mathscr{P}_1$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs du plan $\mathscr{P}_1$.
- Comme Δ est aussi contenue dans $\mathscr{P}_2$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont aussi des vecteurs directeurs du plan $\mathscr{P}_2$.



- On en déduit que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sécants

Δ est donc parallèle à d_1 et d_2.

2.6 Représentation paramétrique d'une droite

2.6.1 Théorème

Théorème 15 : Soit une droite (Δ) définie par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$.

La droite (Δ) admet donc un système d'équations paramétriques, appelé représentation paramétrique, de la forme :

$$(\Delta) \quad \begin{cases} x = x_A + a\,t \\ y = y_A + b\,t \\ z = z_A + c\,t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Démonstration : Soit un point quelconque $M(x; y; z)$ de Δ, alors $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, donc :

$$\exists t \in \mathbb{R} \quad \text{tel que :} \quad \overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} x - x_A = a\,t \\ y - y_A = b\,t \\ z - z_A = c\,t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + a\,t \\ y = y_A + b\,t \\ z = z_A + c\,t \end{cases}$$

Remarque : Pour une demi-droite, il suffit de remplacer $t \in \mathbb{R}$, par une section commençante ou une section finissante : $]-\infty; \alpha]$ ou $[\alpha; +\infty[$

Pour un segment il suffit de remplacer $t \in \mathbb{R}$, par un intervalle fermé $[\alpha; \beta]$.

2.6.2 Exercices

1) Donner la représentation paramétrique de la droite d définie par :

$$A(2; 1; -1) \quad \text{et} \quad \vec{u}(0; 1; -1)$$

2) A et B ont pour coordonnées respectives :

$$A(-2; 1; 0) \quad \text{et} \quad B(2, 3, 1)$$

Donner la représentation paramétrique de chacun des ensembles suivants :

a) La droite (AB) c) La demi-droite [AB)
b) Le segment [AB] d) La demi-droite [BA)

3) Les représentations paramétriques suivantes sont-elles associées à une même droite ?

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x = 3 - 6s \\ y = -3s + 2 \\ z = 9s - 5 \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

CORRECTION

1) La droite d a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

2) Un vecteur directeur de la droite (AB) est : $\overrightarrow{AB} = (4;2;1)$.

a) La droite (AB) a pour représentation paramétrique :

$$(AB) \quad \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

b) Pour déterminer l'intervalle du paramètre t pour le segment [AB], on doit connaître la valeur de t pour avoir le point B : on trouve $t = 1$. On a donc :

$$[AB] \quad \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad t \in [0;1]$$

c) Pour la demi-droite [AB). Le paramètre doit être positif pour avoir le point B, on a donc :

$$[AB) \quad \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}_+$$

d) Pour la demi droite [BA). Le paramètre t doit être inférieur à 1 pour contenir A. On a donc :

$$[BA) \quad \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad t \in]-\infty;1]$$

3) Pour que les deux représentations soit la même droite, il faut que leurs vecteurs directeurs soient colinéaires et qu'elles possèdent un point commun.

On obtient comme vecteurs directeurs respectifs :

$$\vec{u_1} = (2;1;-3) \quad \text{et} \quad \vec{u_2} = (-6;-3;9)$$

On a donc : $\vec{u_2} = -3\vec{u_1}$. Les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont donc colinéaires.

Prenons un point quelconque de d_1, la première droite. Par exemple avec $t = 0$, on obtient $A(-1;0;1)$. Cherchons à déterminer s pour savoir si A est sur la deuxième droite, d_2. On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 3 - 6s = -1 \\ -3s + 2 = 0 \\ 9s - 5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \dfrac{2}{3} \\ s = \dfrac{2}{3} \\ s = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Comme on peut déterminer s, A appartient aussi à d_2. On a donc $d_1 = d_2$.

2.6.3 Représentation paramétrique d'un plan

Théorème 16 : Soit un plan $\mathscr{P}$ défini par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et deux vecteurs non colinéraires $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(\alpha; \beta; \gamma)$.

Le plan $\mathscr{P}$ admet donc un système d'équations paramétriques, appelé représentation paramétrique, de la forme :

$$\mathscr{P} \quad \begin{cases} x = x_A + a\,t + \alpha\,s \\ y = y_A + b\,t + \beta\,s \\ z = z_A + c\,t + \gamma\,s \end{cases} \qquad (t, s) \in \mathbb{R}^2$$