

EXERCICE 2

Proposition 1. **VRAI**

Proposition 2. **FAUX**

Proposition 3. **VRAI**

Proposition 4. **VRAI**

Justification 1 Un vecteur directeur de la droite \mathcal{D} est le vecteur \vec{u} de coordonnées $(-2, 2, 2)$. Un vecteur normal au plan \mathcal{P} est le vecteur \vec{n} de coordonnées $(1, -1, -1)$. On remarque que $\vec{u} = -2\vec{n}$ et en particulier \vec{u} est colinéaire à \vec{n} . On en déduit que la droite \mathcal{D} est orthogonale au plan \mathcal{P} . La proposition 1 est vraie.

Justification 2 La distance du centre O de la sphère \mathcal{S} au plan \mathcal{P} est

$$d = \frac{|0 - 0 - 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

La distance d n'est pas égale au rayon de la sphère \mathcal{S} et donc la sphère \mathcal{S} n'est pas tangente au plan \mathcal{P} . La proposition 2 est fautive.

Justification 3 Un vecteur normal au plan \mathcal{P}' est le vecteur \vec{n}' de coordonnées $(1, 1, 3)$. Les vecteurs \vec{n} et \vec{n}' ne sont pas colinéaires car s'il existe un réel k tel que $\vec{n}' = k\vec{n}$ alors $k = 1$ et aussi $k = -1$ ce qui est impossible.

On en déduit que les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' ne sont pas parallèles et donc que \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont sécants en une droite Δ .

Notons Δ' la droite de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 1 - t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

Pour tout réel t' ,

$$(1 - t') - (-1 - 2t') - (t') - 2 = 0 \text{ et } (1 - t') + (-1 - 2t') + 3(t') = 0.$$

Donc tout point de la droite Δ' appartient au plan \mathcal{P} et au plan \mathcal{P}' ou encore la droite Δ' est contenue dans le plan \mathcal{P} et dans le plan \mathcal{P}' . Finalement, Δ' est la droite Δ d'intersection des plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' ou encore un système d'équations

paramétriques de Δ est
$$\begin{cases} x = 1 - t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$
 La proposition 3 est vraie.

Justification 4 Un vecteur directeur de Δ est le vecteur \vec{u}' de coordonnées $(-1, -2, 1)$. Les vecteurs \vec{u} et \vec{u}' ne sont pas colinéaires et donc les droites \mathcal{D} et Δ ne sont pas parallèles. On en déduit que les droites \mathcal{D} et Δ sont sécantes ou non coplanaires.

Déterminons alors l'intersection de \mathcal{D} et Δ . Soient $M(-3 - 2t, 2t, 1 + 2t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de \mathcal{D} et $M'(1 - t', -1 - 2t', t')$, $t' \in \mathbb{R}$, un point de Δ .

$$M = M' \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - 2t = 1 - t' \\ 2t = -1 - 2t' \\ 1 + 2t = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 1 + 2t \text{ (*)} \\ -3 - 2t = 1 - (1 + 2t) \\ 2t = -1 - 2(1 + 2t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 1 + 2t \\ -3 = 0 \\ 2t = -1 - 2(1 + 2t) \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution et donc \mathcal{D} et Δ n'ont aucun point commun. Finalement, les droites \mathcal{D} et Δ sont non coplanaires. La proposition 4 est vraie.