NOMBRES COMPLEXES

1. ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

THÉORÈME ET DÉFINITION

On admet qu'il existe un ensemble de nombres (appelés **nombres complexes**), noté $\mathbb{C}$ tel que :

- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent des règles de calcul analogues à celles de $\mathbb{R}$
- $\mathbb{C}$ contient un nombre noté i tel que $i^2 = -1$
- Chaque élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit **de manière unique** sous la forme $z = a + ib$ où a et b sont deux réels.

EXEMPLE

$\sqrt{5}+\frac{1}{2}i$, $3i$ et $\sqrt{2}$ sont des nombres complexes ($\sqrt{2}$ est un nombre réel mais comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ c'est aussi un nombre complexe !)

REMARQUE

Attention : On définit une addition et une multiplication sur $\mathbb{C}$ mais on ne définit **pas** de relation d'ordre (comme $\leqslant$). En effet il n'est pas possible de définir une telle relation qui soit compatible avec celle définie sur $\mathbb{R}$ et possède les même propriétés que dans $\mathbb{R}$.

Dans les exercices, attention donc à ne pas écrire de choses comme $z < z'$, si z et z' sont des nombres complexes non réels !

DÉFINITIONS

- L'écriture $z = a + ib$ est appelée la **forme algébrique** du nombre complexe z.
- Le nombre réel a s'appelle la **partie réelle** du nombre complexe z.
- Le nombre réel b s'appelle la **partie imaginaire** du nombre complexe z.
- Si la partie réelle de z est nulle (c'est à dire $a = 0$ et $z = bi$), on dit que z est un **imaginaire pur** .

PROPRIÉTÉ

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

REMARQUES

- Cela résulte immédiatement du fait que chaque élément de $\mathbb{C}$ s'écrit **de manière unique** sous la forme $z = a + ib$.
- En particulier, un nombre complexe est nul si et seulement si ses parties réelles et imaginaires sont nulles.

2. CONJUGUÉ

DÉFINITION

Soit z le nombre complexe $z = a + ib$.On appelle **conjugué** de z, le nombre complexe

$$\overline{z} = a - ib.$$

EXEMPLE

Soit $z = 3 + 4i$

Le conjugué de z est $\overline{z} = 3 - 4i$.

PROPRIÉTÉS DES CONJUGUÉS

Pour tous nombres complexes z et z' et tout entier naturel n :

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ pour $z' \neq 0$
- $\overline{(z^n)} = \left(\overline{z}\right)^n$.

REMARQUES

- Par contre, en général, $|z + z'|$ n'est pas égal à $|z| + |z'|$. On peut juste montrer que $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire) ;
- **ROC :** La démonstration de certaines de ces propriétés a été demandée au Bac 2014 .

3. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ À COEFFICIENTS RÉELS

PROPRIÉTÉ

Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$.

Dans $\mathbb{C}$, l'équation $az^2+bz+c=0$ admet toujours au moins une solution.

Plus précisément, si on note Δ son discriminant ($\Delta = b^2-4ac$) :

- Si $\Delta > 0$, l'équation possède **deux solutions réelles** :
  $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, l'équation possède **une solution réelle** :
  $z = \dfrac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, l'équation possède **deux solutions complexes** conjuguées l'une de l'autre :
  $z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

EXEMPLE

Soit à résoudre l'équation $z^2+2z+2=0$ dans $\mathbb{C}$

$\Delta = 4-8=-4$

$\Delta < 0$ donc l'équation admet 2 racines complexes conjuguées :

$z_1 = \dfrac{-2-i\sqrt{4}}{2} = -1-i$ et $z_2 = \dfrac{-2+i\sqrt{4}}{2} = -1+i$.

4. REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$

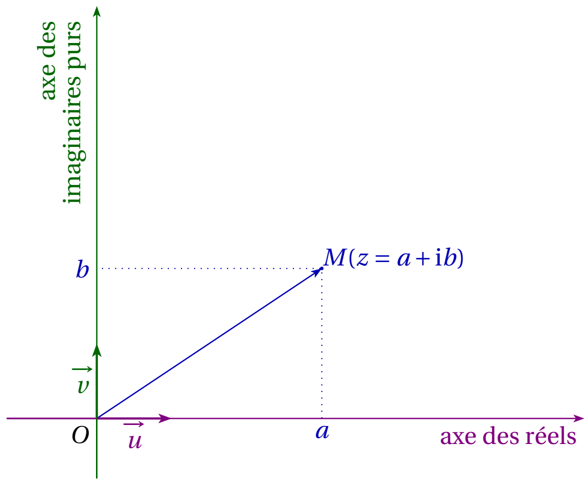
DÉFINITIONS

A tout nombre complexe $z = a+ib$, on associe le point M de coordonnées $(a;b)$

On dit que M est l'**image** de z et que z est l'**affixe** du point M.

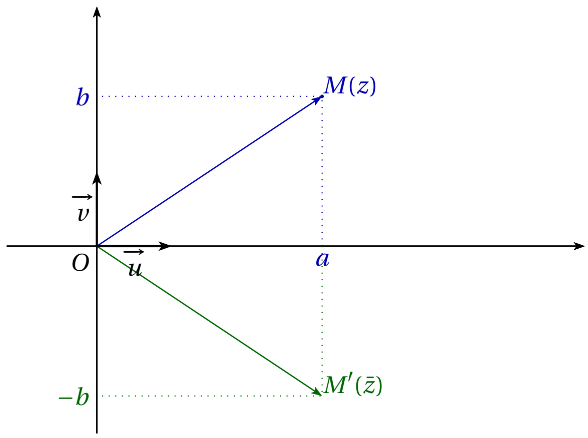
A tout vecteur $\vec{k}$ de coordonnées $(a;b)$ on associe le nombre complexe $z=a+ib$.

On dit que z est l'**affixe** du vecteur $\vec{k}$.



PROPRIÉTÉS

- M appartient à l'axe des abscisses si et seulement si son affixe z est un nombre réel
- M appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si son affixe z est un nombre imaginaire pur
- Deux nombres complexes conjugués ont des affixes symétriques par rapport à l'axe des abscisses



PROPRIÉTÉS

Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B.

- l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égale à :

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$

- l'affixe du milieu M du segment $[AB]$ est égale à :

$$z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$$

PROPRIÉTÉS

Soient $\vec{w}\,(z)$ et $\overrightarrow{w'}\,(z')$ deux vecteurs du plan et k un nombre réel.

- Le vecteur $\vec{w} + \overrightarrow{w'}$ a pour affixe $z + z'$;
- Le vecteur $k\vec{w}$ a pour affixe kz.

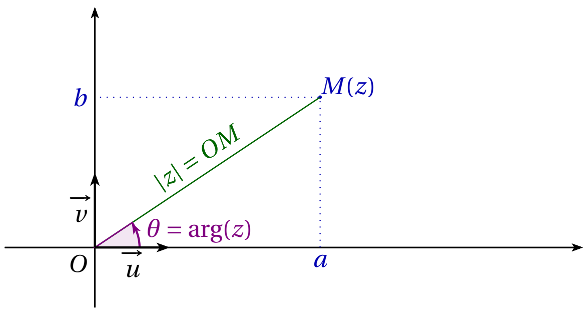
5. FORME TRIGONOMÉTRIQUE

DÉFINITION

Soit z un nombre complexe **non nul** d'image M dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On appelle module de z, et on note $|z|$ le nombre **réel** positif ou nul $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

On appelle argument de z et on note $\arg(z)$ une mesure, exprimée en radians, de l'angle $\left(\vec{u}; \overrightarrow{OM}\right)$.



PROPRIÉTÉS DES MODULES

Pour tous nombres complexes z et z' :

- $|z|^2 = z \times \overline{z}$
- $|zz'| = |z| \times |z'|$
- $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$ pour $z' \neq 0$

PROPRIÉTÉS DES ARGUMENTS

Pour tous nombres complexes z et z' **non nuls** et tout entier $n \in \mathbb{Z}$:

- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$
- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
- $\arg(z^n) = n \times \arg(z)$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

REMARQUE

En particulier :

- $\arg(-z) = \arg(z) + \arg(-1) = \arg(z) + \pi$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg(1) - \arg(z) = -\arg(z)$.

THÉORÈME ET DÉFINITION

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Cette écriture s'appelle **forme trigonométrique** du nombre z.

PASSAGE DE LA FORME ALGÉBRIQUE À LA FORME TRIGONOMÉTRIQUE

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul.

- $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $\theta = \arg(z)$ est défini par :

  $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

EXEMPLE

Soit $z = \sqrt{3} + i$.

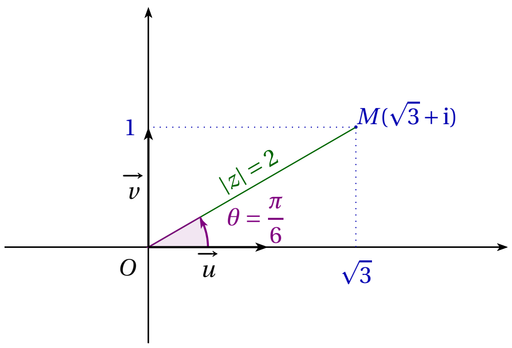
$|z| = \sqrt{3+1} = 2$

Si θ est un argument de z :

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ donc $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ (mod. 2π)

La forme trigonométrique de z est donc :

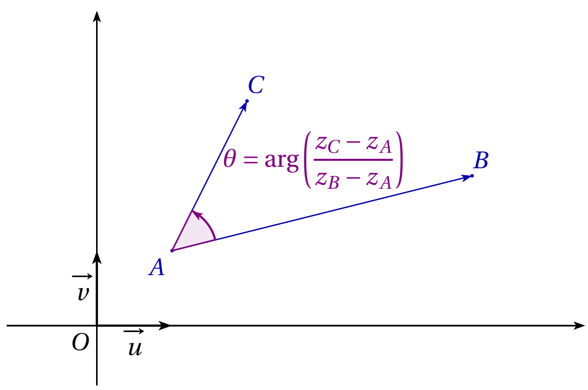
$z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.



ANGLE DE VECTEURS ET ARGUMENTS

Soit A, B et C trois points du plan d'afixes respectives z_A,z_B, z_C avec $A \neq B$ et $A \neq C$:

$\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$.



REMARQUES

- Notez bien l'**ordre des affixes** (inverse de l'ordre des points dans l'écriture de l'angle).
- **Premier cas particulier important :**
  A, B et C sont alignés
  $\Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0$ ou π [mod. 2π]
  $\Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.

- **Second cas particulier important :**
  $\widehat{BAC}$ est un angle droit
  $\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm\frac{\pi}{2}\ [\text{mod. } 2\pi]$
  $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est un **imaginaire pur**.

6. FORME EXPONENTIELLE

NOTATION

Si z est un nombre complexe de module r et d'argument θ, la notation exponentielle du nombre z est :

$$z = re^{i\theta}$$

REMARQUE

Ce sont les propriétés des arguments :

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
- $\arg(z^n) = n \times \arg(z)$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

similaires aux propriétés de l'exponentielle qui justifient cette notation.

EXEMPLE

Le nombre -1 a pour module 1 et pour argument π (mod. 2π). On peut donc écrire :

$-1 = e^{i\pi}$ ou encore $e^{i\pi} + 1 = 0$.

C'est la célèbre identité d'Euler qui relie 0, 1, e, i et π.

Les propriétés des arguments vues précédemment s'écrivent alors :

PROPRIÉTÉS

Pour tous réels θ et θ' :

- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$
- $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.