

I. Forme algébrique d'un nombre complexe.

Théorème

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, de nombres appelés *nombres complexes*, tel que :

- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication pour lesquelles les règles de calcul sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$;
- Il existe dans $\mathbb{C}$ un nombre non réel, noté i , vérifiant $i^2 = -1$;
- Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique sous la forme (dite algébrique) :

$$z = a + i b \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont des réels.}$$

Définitions Pour le complexe $z = a + i b$

- Le réel a est appelé *partie réelle* de z et est noté $\text{Re}(z)$.
- Le réel b est appelé *partie imaginaire* de z et est noté $\text{Im}(z)$.
- Si $b = 0$ alors $z = a + 0i$ est noté $z = a$ et z est un *réel*.
- Si $a = 0$ alors $z = 0 + ib$ est noté $z = ib$ et z est appelé *imaginaire pur*.
- Le complexe $0 + 0i$ noté 0 est à la fois réel et imaginaire pur.

Premières conséquences

Pour a, b, a', b' réels,

$a + i b = a' + i b' \Leftrightarrow (a = a' \text{ et } b = b')$ (ce qui traduit l'unicité de l'écriture algébrique)

$a + i b = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \text{ et } b = 0)$

Opposé d'un complexe

Si $z = a + i b$ avec a et b réels alors on appelle opposé de z le complexe noté $(-z)$ tel que : $-z = -a + i(-b)$

II. Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$

Définitions

Soit le complexe $z = a + i b$, (a et b réels.)

- Le point $M(a;b)$ est appelé le *point image* de z .

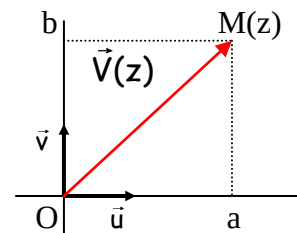
On le note souvent $M(z)$.

- Le vecteur $\vec{V}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est le *vecteur image* de z .

On le note souvent $\vec{V}(z)$.

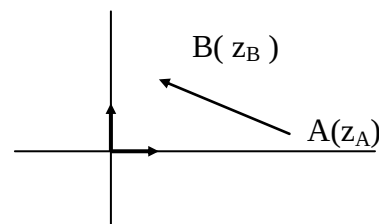
- Le complexe z est l'*affixe* du point M et l'*affixe* du vecteur $\vec{V}$.

On le note souvent z_M ou $z_{\vec{V}}$.



Propriété : *Affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$*

$$\text{On a } z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$



Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et tout réel α

$$z_{\vec{U}+\vec{V}} = z_{\vec{U}} + z_{\vec{V}}$$

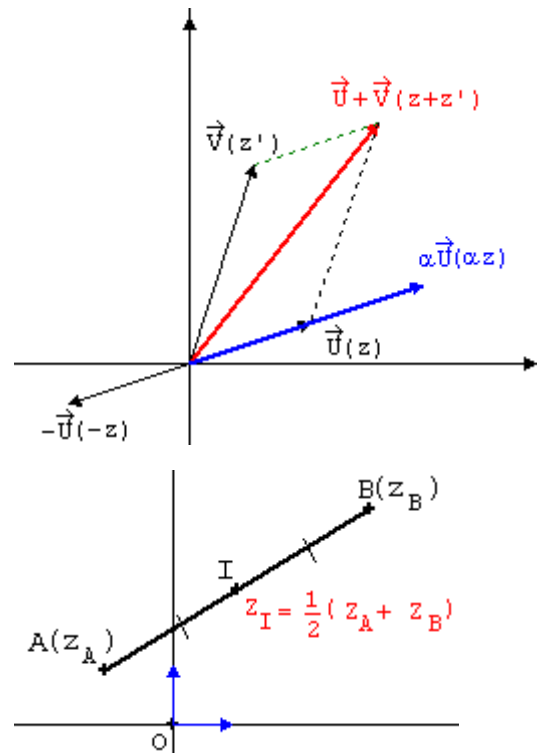
$$\text{et } z_{\alpha\vec{U}} = \alpha z_{\vec{U}}$$

en particulier : $z_{-\vec{U}} = -z_{\vec{U}}$

Affixe du milieu d'un segment

Si I est le milieu du segment [AB] alors

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$



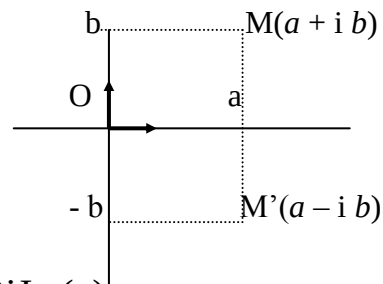
III. Conjugué d'un nombre complexe :

Définition

On appelle *conjugué* du complexe $z = a + ib$, a et b réels, le complexe noté $\bar{z}$ et défini par : $\bar{z} = a - ib$.

Interprétation géométrique

Les images de deux complexes conjugués sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses (appelé souvent axe des réels).



Remarque: $z + \bar{z} = 2a = 2\operatorname{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2ib = 2i\operatorname{Im}(z)$.

Théorèmes Soit z un nombre complexe.

- z est réel si et seulement si $\bar{z} = z$.
- z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$

Propriétés Pour tous complexes z et z' :

- $\overline{\bar{z}} = z$, $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$, $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$ et $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$ pour tout entier n .
- Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ et $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}}$
- Si $z = a + ib$ avec a et b réels alors $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$.

IV. Equation du second degré :

Equation du second degré à coefficients réels dans $\mathbb{C}$: $az^2 + bz + c = 0$, a réel $\neq 0$, b et c réels. Le réel $\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant de l'équation.

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux solutions réelles $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une solution réelle double $z = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$ alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Remarque : dans tous les cas $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

V. Module et arguments d'un nombre complexe non nul.

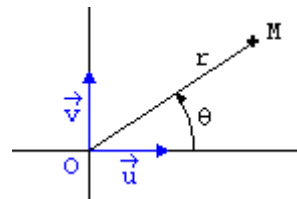
Définition

Soit z un nombre complexe non nul d'image M dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, et soit (r, θ) un couple de coordonnées polaires du point M dans $(O; \vec{u})$.

- le réel r est appelé module de z et noté $|z|$;
- le réel θ est appelé argument de z et noté $\arg(z)$.

On a donc : $|z| = r = OM$ et

$$\arg(z) = \theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$$



Remarques

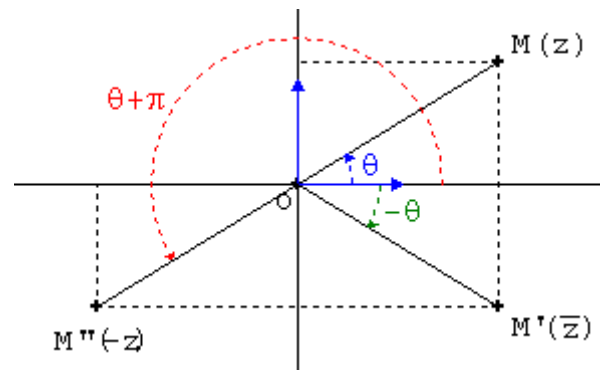
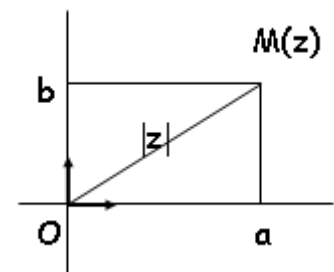
- Le complexe 0 a pour module 0 mais n'a pas d'argument.
- Tout complexe non nul z a une infinité d'arguments. Si θ est l'un d'eux, tout autre argument de z est de la forme $\theta + K 2\pi$, $K \in \mathbb{Z}$. On écrit alors :
 - $\arg(z) = \theta \pmod{2\pi}$ (ou simplement $[2\pi]$).

Conséquences

- Si $z = a + ib$ avec a et b réels alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Le module de tout réel x est la valeur absolue de x .
- z réel non nul équivaut à $\arg(z) = 0 \pmod{\pi}$.
 z imaginaire pur non nul équivaut à $\arg(z) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.
- Soit z un complexe non nul :

$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi}$$

$$\arg(-z) = \pi + \arg(z) \pmod{2\pi}$$



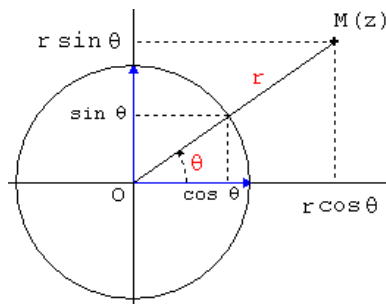
VI. Formes trigonométriques d'un nombre complexe non nul.

Théorème

Soit $z = a + ib$, avec a et b réels, un complexe non nul.

Si $|z| = r$ et si $\arg(z) = \theta \pmod{2\pi}$ alors

$$a = r \cos \theta \quad \text{et} \quad b = r \sin \theta$$

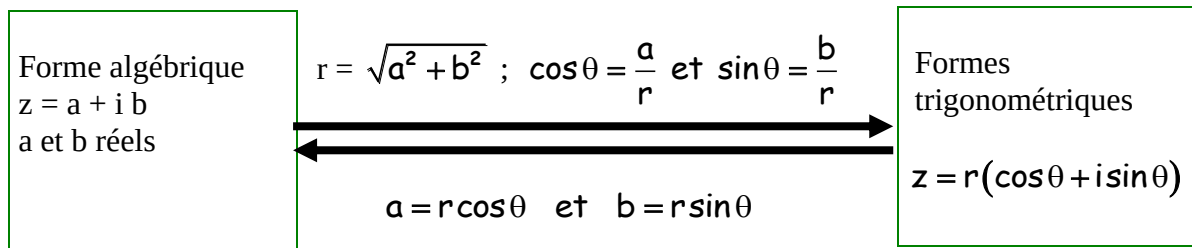


Définition

Soit z un nombre complexe non nul de module r et dont un argument est θ .

L'écriture $z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$ est appelée *forme trigonométrique* de z .

Relations de passage entre forme algébrique et formes trigonométriques.



Propriété : Egalité de deux complexes

Deux complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont le même module et des arguments égaux modulo 2π .

Théorème :

Si $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $r > 0$, alors $|z| = r$ et $\theta = \arg(z) [2\pi]$

VII. Propriétés des modules et arguments.

Propriétés des modules : Pour tous complexes z et z' :

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- $|-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}| = |z|$
- $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ ou $|z|^2 = z\bar{z}$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)
- $|zz'| = |z||z'|$
- $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$ et $\left| \frac{z'}{z} \right| = \frac{|z'|}{|z|}$ si $z \neq 0$.
- Le module d'un produit de n nombres complexes est égal au produit des modules de ces complexes. En particulier : pour tout entier naturel n , $|z^n| = |z|^n$.

Propriétés des arguments : Pour tous complexes non nuls z et z'

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) \quad [2\pi]$
- La première propriété s'étend au produit de n nombres complexes non nuls. En particulier : pour tout entier naturel n , $\arg(z^n) = n \arg(z) \quad [2\pi]$

Propriété : Formule de Moivre

Pour tout réel θ et tout entier naturel n , $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$

VIII. Distances et angles orientés

Longueur d'un segment $[AB]$

$$AB = |z_B - z_A|$$

Mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$

A et B étant deux points distincts

$$(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) \pmod{2\pi}$$

Mesure de l'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$

A, B et C étant trois points distincts

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \arg \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \pmod{2\pi}$$

Conséquences

Les points A, B et C étant trois points

distincts, les points A, B et C sont alignés si, et seulement si, $\arg \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 0 \pmod{\pi}$

les droites (CA) et (CB) sont perpendiculaires si, et seulement si,

$$\arg \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

