Enoncé de l'exercice

Soit les nombres complexes : $z_1=\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$ et $z_2=\frac{1}{2}\left(-1-i\sqrt{3}\right)$

1. Calculer $(z_1)^2$; le comparer à z_2.

2. Calculer $(z_2)^2$; le comparer à z_1.

3. Calculer $(z_1)^3$; $(z_2)^3$ et z_1+z_2+1.

4. a) Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, placer les points A , B , et C d'affixes respectives $z_A=z_1$; $z_B=z_2$ et $z_C=1$.

b) Déterminer le module de z_B-z_A ; de z_C-z_A et celui de z_B-z_C .

c) Conclure sur la nature du triangle ABC .

Correction / explications :

Question 1

$$(z_1)^2=\left(\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(-1+i\sqrt{3}\right)^2=\frac{1}{4}\left((-1)^2-2i\sqrt{3}+\left(i\sqrt{3}\right)^2\right)=\frac{1}{4}\left(1-2i\sqrt{3}-3\right)=\frac{1}{2}\left(-1-i\sqrt{3}\right)=z_2$$

Question 2

$$(z_2)^2=\left(\frac{1}{2}\left(-1-i\sqrt{3}\right)\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1+i\sqrt{3}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1^2+2i\sqrt{3}+\left(i\sqrt{3}\right)^2\right)=\frac{1}{4}\left(1+2i\sqrt{3}-3\right)=\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)=z_1$$

Question 3.1

$$(z_1)^3=(z_1)^2\times z_1=z_2\times z_1=\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)\times\frac{1}{2}\left(-1-i\sqrt{3}\right)=\frac{1}{4}\times\left(-1+i\sqrt{3}\right)\left(-1-i\sqrt{3}\right)=\frac{1}{4}\times\left(-1+i\sqrt{3}\right)\left(-1-i\sqrt{3}\right)$$

donc $(z_1)^3=\frac{1}{4}\times\left((-1)^2-\left(i\sqrt{3}\right)^2\right)=\frac{1}{4}\times(1+3)=1$

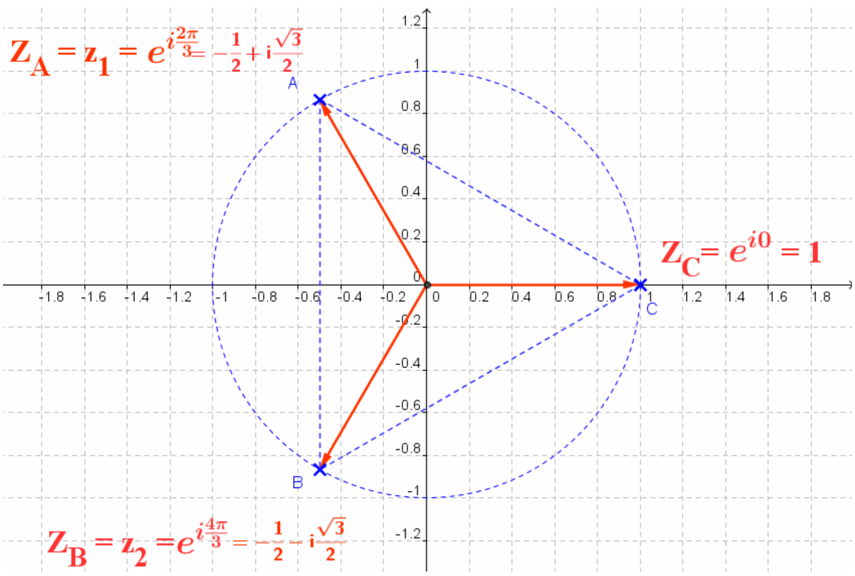
Question 3.2

$(z_2)^3=(z_2)^2\times z_2=z_1\times z_2=1$ d'après le calcul effectué dans la question 3.1

Question 3.3

$$1+z_1+z_2=1+\left(\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)\right)+\left(\frac{1}{2}\left(-1-i\sqrt{3}\right)\right)=1-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

Question 4.a



Question 4.b

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est : $Z_B - Z_A = z_2 - z_1 = \left(\frac{1}{2}\left(-1 - i\sqrt{3}\right)\right) - \left(\frac{1}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)\right) = -i\sqrt{3}$

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AC}$ est : $Z_C - Z_A = 1 - z_1 = 1 - \left(\frac{1}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(3 + i\sqrt{3}\right)$ ..

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{CB}$ est : $Z_B - Z_C = z_1 - 1 = \left(\frac{1}{2}\left(-1 - i\sqrt{3}\right)\right) - 1 = \frac{1}{2}\left(-3 - i\sqrt{3}\right)$

Donc

$\left|Z_B - Z_A\right| = \left|-i\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$

$\left|Z_C - Z_A\right| = \left|\frac{1}{2}\left(3 + i\sqrt{3}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|3 + i\sqrt{3}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{9+3} = \frac{1}{2}\sqrt{12} = \frac{1}{2}\sqrt{4 \times 3} = \sqrt{3}$

$\left|Z_B - Z_C\right| = \left|\frac{1}{2}\left(-3 - i\sqrt{3}\right)\right| = \frac{1}{2} \times \left|-3 - i\sqrt{3}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{9+3} = \frac{1}{2}\sqrt{12} = \frac{1}{2}\sqrt{4 \times 3} = \sqrt{3}$

Question 4.c

Comme on a : $\left|Z_B - Z_A\right| = \left|Z_C - Z_A\right| = \left|Z_B - Z_C\right| = \sqrt{3}$

On a $AB = AC = CB$ est donc le triangle ABC est un triangle équilatéral