

Nombres complexes

1 Définitions

Définition 1 On appelle ensemble des nombres complexes et on note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres qui s'écrivent sous la forme $a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et où i est un nombre tel que $i^2 = -1$.
 a est la partie réelle de z , b est la partie imaginaire. $a + ib$ est la forme algébrique de z .

Remarque 1 $\forall a \in \mathbb{R} : a = a + 0.i \in \mathbb{C}$. Donc $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Egalité de deux complexes : $a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$

Définition 2 Le complexe conjugué de $z = a + ib$ est $\bar{z} = a - ib$

Proposition 1 $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$ $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$

Proposition 2 $\bar{\bar{z}} = z$; $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$; $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$; si $z_2 \neq 0 : \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

Remarque 2 Si P est un polynôme à coefficients réels : $P(\alpha) = 0 \Rightarrow P(\bar{\alpha}) = 0$.

Exercice 1 Mettre sous forme algébrique $z = \frac{(2+i)^2(2i)}{5-i}$

Exercice 2 Montrer que $\forall z \in \mathbb{C} : \frac{2+3z\bar{z}}{z+\bar{z}} \in \mathbb{R}$ et $\frac{2i+z-\bar{z}}{3+2z\bar{z}} \in i\mathbb{R}$

1.1 Interprétation géométrique

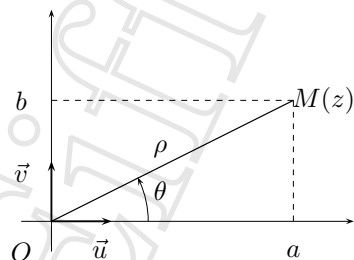
On se place dans le plan muni d'un repère **orthonormé** $(O; \vec{u}, \vec{v})$ qu'on appelle dans cette situation plan complexe.

Si $z = a + ib$, on appelle image de z le point M d'abscisse a et d'ordonnée b .

On dit aussi que M a pour affixe z .

Si $\vec{V} = x\vec{u} + y\vec{v}$, le complexe $z = x + iy$ est appelé affixe de $\vec{V}$

1.2 Module et Argument



$$z = a + ib$$

$$\rho = |z| = OM = \|\vec{OM}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{Si } z \neq 0 : \theta = \arg(z) = (\vec{u}, \vec{OM})$$

$$a = \rho \cos \theta \text{ et } b = \rho \sin \theta$$

Remarque 3 $\arg(z)$ est défini à $2k\pi$ près.

Remarque 4 $z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) = k\pi$ et $z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Remarque 5 $z_1 = z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$ et $\arg(z_1) = \arg(z_2) + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Proposition 3 Si A, B, C, D ont pour affixes respectives z_A, z_B, z_C, z_D :

$$\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = |z_B - z_A| \quad ; \quad (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) \quad ; \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$$

Remarque 6 $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

Remarque 7 On a $z = a + ib = \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$

Cette dernière forme d'écriture de z est appelée forme trigonométrique. Elle se note aussi sous forme condensée : $[\rho; \theta]$.

$$z = a + ib = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = [\rho; \theta]$$

Exercice 3 Déterminer module et argument des complexes $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$

Exercice 4 Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :

1. $\Re(z) = 3$
2. $\Im(z) = 2$
3. $|z - 1 + i| = 3$
4. $\arg(z + 2 - 3i) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 5 Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soient A, B, C les points d'affixes respectives $2\sqrt{3}, -\sqrt{3} + 3i$ et $-\sqrt{3} - 3i$.

1. Calculer les longueurs AB, BC et AC . Conclusion
2. Donner une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et en déduire que $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
3. Justifier que $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$.
4. Retrouver les valeurs de $\cos \frac{\pi}{3}$ et de $\sin \frac{\pi}{3}$ en montrant que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$

2 Produit et quotient de nombres complexes

On montre que $[\rho_1; \theta_1] \times [\rho_2; \theta_2] = [\rho_2 \rho_1; \theta_1 + \theta_2]$. D'où

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad \text{et} \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi$$

On en déduit : Si $n \in \mathbb{Z}$: $[\rho; \theta]^n = [\rho^n; n\theta]$. D'où

$$|z^n| = |z|^n \quad \text{et} \quad \arg(z^n) = n \arg(z) + 2k\pi$$

Cas particulier : $\rho = 1$. On obtient alors la formule de De Moivre dite aussi de De Moivre-Laplace

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

On montre également : $\left[\frac{\rho_1}{\rho_2}; \frac{\theta_1}{\theta_2} \right] = \left[\frac{\rho_1}{\rho_2}; \theta_1 - \theta_2 \right]$. D'où :

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) + 2k\pi$$

Exercice 6 Déterminer module et argument de $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$ et $z_2 = (\sqrt{3}-i)^3$.

Exercice 7 A l'aide de la formule de Moivre, exprimer $\cos 3x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$

3 Equation du second degré dans $\mathbb{C}$

Soit à résoudre $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b et c réels. ($a \neq 0$). Soit $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Si $\Delta > 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ possède deux solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. Si $\Delta = 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ possède une racine double réelle : $z = \frac{-b}{2a}$

3. Si $\Delta < 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ possède deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Exercice 8 Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $z^2 + 1 = 0$

3. $z^2 + 2z - 3 = 0$

5. $z^2 + 2z + 2 = 0$

2. $z^2 + z + 1 = 0$

4. $9z^2 - 42z + 49 = 0$

6. $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$

4 Exponentielle complexe

$$\forall \theta \in \mathbb{R} : e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Tout nombre complexe de module ρ et d'argument θ peut donc s'écrire sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$. C'est la forme exponentielle de z .

$$z = a + ib = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = [\rho; \theta] = \rho e^{i\theta}$$

Formules d'Euler : On a $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Donc $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$

Par addition puis par soustraction de ces 2 égalités, on obtient les formules d'Euler :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Exercice 9 Ecrire sous forme exponentielle

1. $\overline{e^{i\theta}}$

3. i

2. -7

4. $-i$

Exercice 10 En utilisant les formules d'Euler, montrer

1. $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$

2. $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$

3. $\sin x \cos 3x = \frac{1}{2} \sin 4x - \frac{1}{2} \sin 2x$