

La fonction réciproque d'une « fonction f bijective » notation $g = f^{-1}$

1) Notion de fonction bijective

Soit I et J 2 intervalles de $\mathbb{R}$

Soit une fonction f définie sur l'intervalle I

f est une fonction bijective (on dit communément « une bijection ») de I sur J si et seulement si :

- 1) la fonction f est surjective : c'est-à-dire $\forall y \in J \quad \exists x \in I$ tel que $y = f(x)$ (c.a.d $J = f(I)$)
- 2) la fonction f est injective : c'est-à-dire $\forall y \in J \quad \exists! x \in I$ tel que $y = f(x)$ (c.a.d un seul antécédent)

Remarques :

- a) Si D_f est le domaine de définition de la fonction f , il est nécessaire que $I \subset D_f$
- b) Si la fonction f est une fonction continue et strictement monotone sur I alors la fonction f est une bijection de I sur $J = f(I)$

2) Notion de fonction réciproque d'une fonction f bijective de I sur J

Si f est une fonction bijective de I sur J , la fonction g définie de J sur I est appelée la fonction réciproque de la fonction f si et seulement si on a : $\forall x \in I \quad \forall y \in J \quad y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$

et on note $g = f^{-1}$

Remarques :

- a) La fonction réciproque de la fonction g est la fonction f et on a aussi $f = g^{-1}$
- b) Si $I = J$ on a : $\forall x \in I \quad g \circ f(x) = f \circ g(x) = x$

3) Exemples :

3.1) La restriction de la fonction « carré » sur $\mathbb{R}^+$ est une fonction bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$
 $\forall x \geq 0 \quad \forall y \geq 0 \quad y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$ (et sa fonction réciproque est : $\forall x \geq 0 \quad x \rightarrow \sqrt{x}$)

3.2) La fonction « exponentielle » est une fonction bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
 $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y > 0 \quad y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$ (et sa fonction réciproque : $\forall x > 0 \quad x \rightarrow \ln(x)$)

3.3) La fonction « racine n-ième » est une fonction bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$
 $\forall x \geq 0 \quad \forall y \geq 0 \quad y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow x = y^n$ ou $y = x^{\left(\frac{1}{n}\right)} \Leftrightarrow x = y^n$ (fonction réciproque $\forall x \geq 0 \quad x \rightarrow x^{\frac{1}{n}}$)

4) Résolution d'équation

4.1) Résoudre l'équation $\left(1 + \frac{t}{100}\right)^5 = 32$ avec $t \geq 0$

La fonction : $x \mapsto x^5$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ et sa fonction réciproque est la fonction : $x \mapsto x^{\frac{1}{5}}$

Comme $t \geq 0$, on a donc $1 + \frac{t}{100} \geq 0$ et donc :

$$\left(1 + \frac{t}{100}\right)^5 = 32 \Leftrightarrow \left[\left(1 + \frac{t}{100}\right)^5 \right]^{\frac{1}{5}} = 32^{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow 1 + \frac{t}{100} = 2 \Leftrightarrow t = 100$$

4.2) Résoudre l'équation : $\ln(x+1) = 1$ sur $\mathbb{R}$

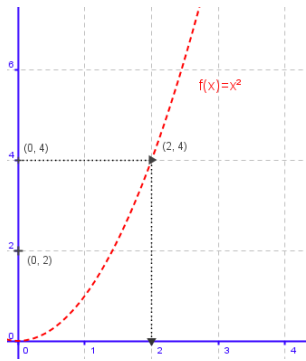
Comme la fonction $x \rightarrow \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$

pour que cette équation soit définie il est nécessaire que : $x+1 > 0$ c'est-à-dire $x > -1$

Et on a : si $x > -1$ alors $\ln(x+1) = 1 \Leftrightarrow e^{\ln(x+1)} = e^1 \Leftrightarrow x+1 = e \Leftrightarrow x = e-1$

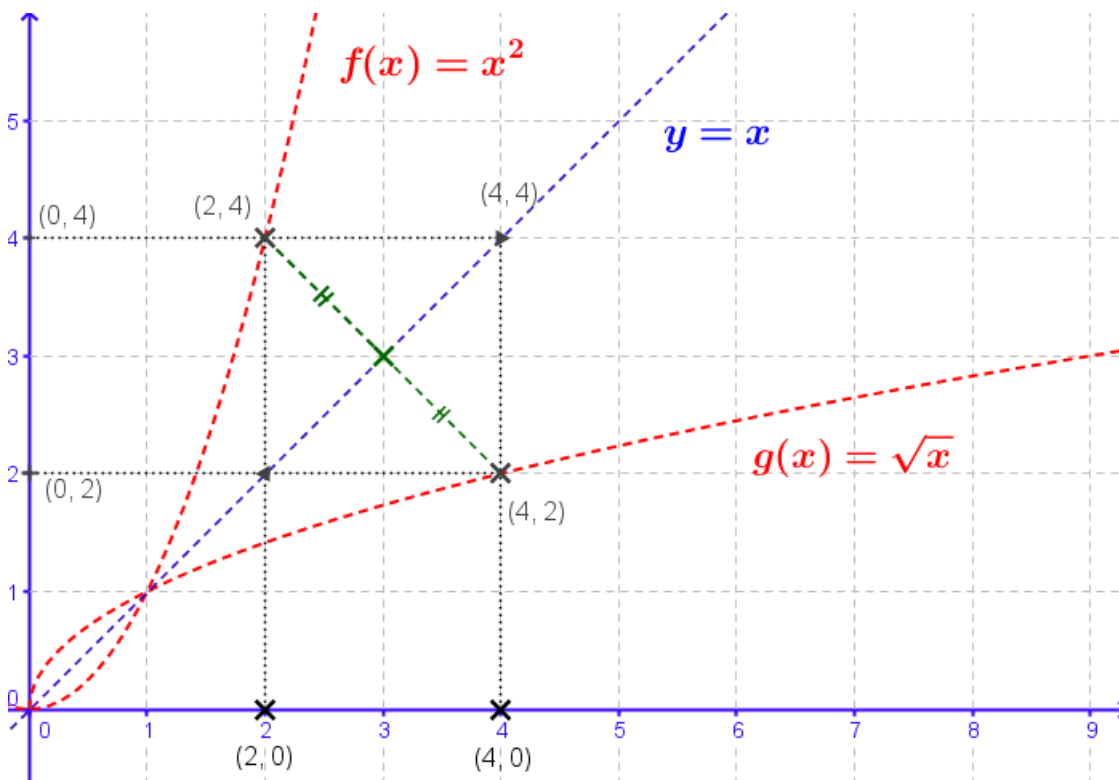
Conclusion : Comme $e-1 > -1$ l'équation $\ln(x+1) = 1$ admet une et une seule solution qui est $x = e-1$

5) Quelques représentations graphiques ..

5.1) Représentation graphique de la fonction $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}^+$ 

Cette représentation graphique « permet de visualiser » que pour tout réel $k \geq 0$ tel que $x^2 = k$ le nombre k admet un et un seul antécédent par la fonction « carré » qui est $x = \sqrt{k}$

Conclusion : la fonction f définie par $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f(x) = x^2$ est une fonction bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$

5.2) Représentation graphique des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$ 

$$\text{On a } \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad g \circ f(x) = g[f(x)] = g(x^2) = \sqrt{x^2} = x$$

$$\text{On a également } \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f \circ g(x) = f[g(x)] = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$

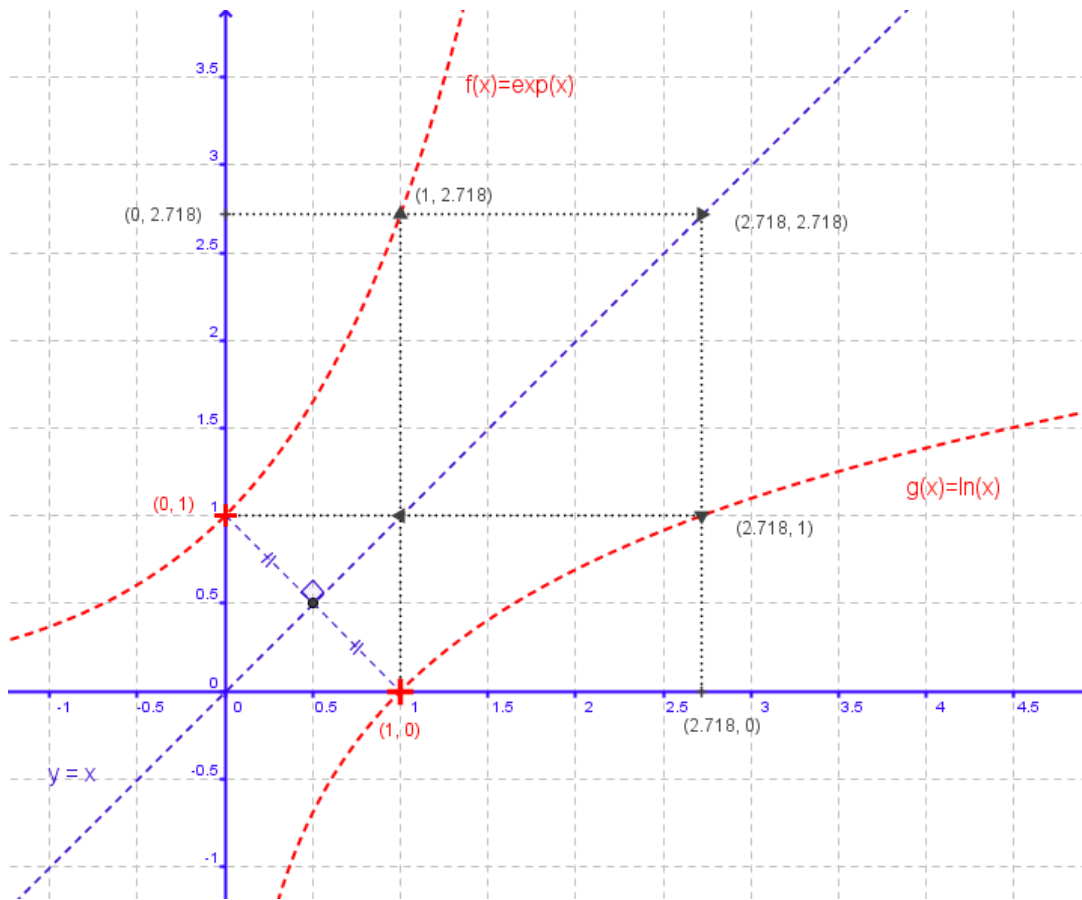
$$\text{Conclusion } \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f \circ g(x) = g \circ f(x) = x \quad \text{c'est-à-dire } \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad (\sqrt{x})^2 = \sqrt{x^2} = x$$

Remarque : Les représentations graphiques **dans un repère normé** des fonctions f et g sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (c'est-à-dire à la bissectrice de l'angle (Ox, Oy))

5.3) Représentation graphique des fonctions « *exponentielle* » et « *logarithme népérien* »

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{+*}$ telle que $f(x) = \exp(x) = e^x$

Soit la fonction $g: \mathbb{R}^{+*} \mapsto \mathbb{R}$ telle que $g(x) = \ln(x)$



Conclusion $\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln \circ \exp(x) = x$ c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(e^x) = x$

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad \exp \circ \ln(x) = x$ c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad e^{\ln(x)} = x$

Remarque : Les représentations graphiques **dans un repère normé** des fonctions $f(x) = e^x$ et $g(x) = \ln(x)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$

5.4) Représentation graphique des fonctions « *puissance* » et « *racine n^{ième}* » (avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$)

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ telle que $f(x) = x^n$

Soit la fonction $g: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ telle que $g(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\left(\frac{1}{n}\right)}$

Conclusion $\forall x \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \forall y \in \mathbb{R}^+ \text{ on a : } y = x^n \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y} \text{ et } y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow x = y^n$:

