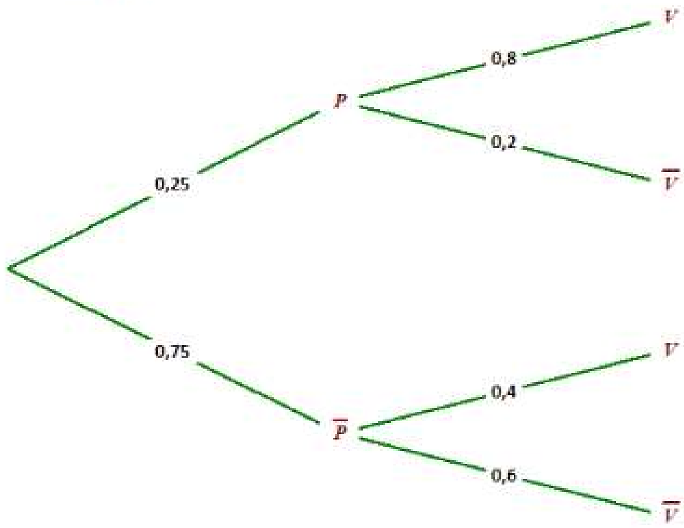
CORRECTION de l'exercice n° 1

1. Affirmation 1 VRAIE
   On appelle P l'événement : "il pleut" et V l'événement "Elle prend sa voiture"
   On obtient alors l'arbre suivant :



D'après la propriété des probabilités totales on a :

$$p\left(\overline{V}\right) = p\left(P \cap \overline{V}\right) + p\left(\overline{P} \cap \overline{V}\right)$$

$$= 0,25 \times 0,2 + 0,75 \times 0,6$$

$$= 0,5$$

2. Affirmation 2 VRAIE
   A et B sont indépendant donc $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
   D'après la propriété des probabilités totales :

$$p(A) = p(A \cap B) + p\left(A \cap \overline{B}\right)$$

$$p(A) = p(A) \times p(B) + p\left(A \cap \overline{B}\right)$$

$$p(A) - p(A) \times p(B) = p\left(A \cap \overline{B}\right)$$

$$p(A)\,(1 - p(B)) = p\left(A \cap \overline{B}\right)$$

$$p(A) \times p\left(\overline{B}\right) = p\left(A \cap \overline{B}\right)$$

3. Affirmation 3 FAUSSE
   On cherche donc $P(T \geq 5) = e^{-5 \times 0,7} \approx 0,03$

   Affirmation 4 FAUSSE
   Le temps moyen d'attente est donné par :
   $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} \approx 1,4 \approx 1$ min 24 secondes.

Affirmation 4 FAUSSE
Le temps moyen d'attente est donné par :
$E(T) = \frac{1}{\lambda} \approx 1,4 \approx$ 1 min 24 secondes.

4. Affirmation 5 VRAIE
$n = 183 \geq 30$, $np = 183 \times 0,39 = 71,37 \geq 5$ et $n(1-p) = 111,63 \geq 5$
Donc un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est :

$$I_{183} = \left[0,39 - 1,96\frac{\sqrt{0,39 \times 0,61}}{\sqrt{183}} ; 0,39 + 1,96\frac{\sqrt{0,39 \times 0,61}}{\sqrt{183}}\right]$$

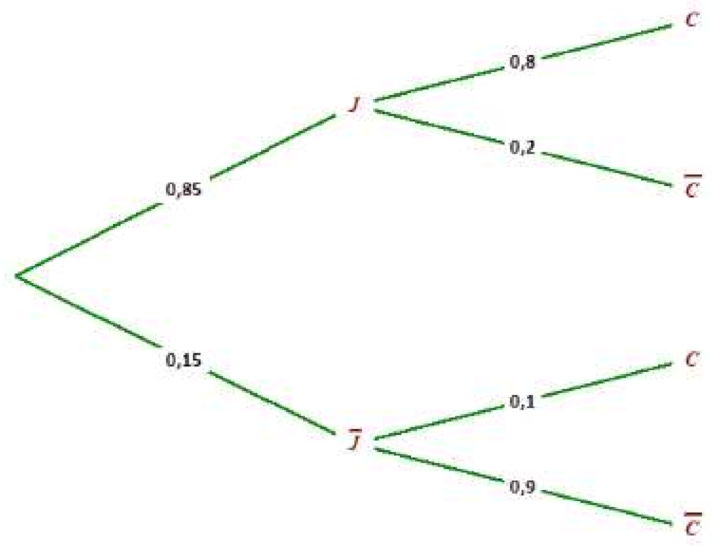
$$\approx [0,319 ; 0,461]$$

La fréquence observée est $0,34 \in I_{183}$.

[collapse]

CORRECTION de l'exercice n° 2

1. a.



b. On cherche donc $P\left(\overline{J}\cap C\right)=0,15\times 0,1=0,015$

c. D'après la propriété des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(J\cap C)+P\left(\overline{J}\cap C\right) \\ &= 0,85\times 0,8+0,015 \\ &= 0,695 \end{aligned}$$

d. On cherche à calculer :

$$\begin{aligned} P_C\left(\overline{J}\right) &= \frac{P\left(C\cap\overline{J}\right)}{P(C)} \\ &= \frac{0,015}{0,695} \\ &= \frac{3}{139} \\ &\approx 0,0216 \end{aligned}$$

2. a. D'après la calculatrice $P(87\leq X\leq 89)\approx 0,2417$

b. $P(X\geq 91)=0,5-P(90\leq X\leq 91)\approx 0,3085$

Partie B

1. $n=120\geq 30$, $np=120\times 0,6=72\geq 5$ et $n(1-p)=48\geq 5$
Par conséquent un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est :

$$\begin{aligned} I_{120} &= \left[0,6-1,96\times\frac{\sqrt{0,6\times 0,4}}{\sqrt{120}};0,6+1,96\times\frac{\sqrt{0,6\times 0,4}}{\sqrt{120}}\right] \\ &\approx [0,5123;0,6877] \end{aligned}$$

2. La fréquence observée est $f=\frac{65}{120}\approx 0,5417\in I_{120}$.
L'ostréiculteur a donc raison d'affirmer que 60% de ses huitres ont une masse supérieure à 91g avec une marge d'erreur de 5%.

CORRECTION de l'exercice n° 3

Partie A

1. **a.** La variable aléatoire Z correspond au changement de variable $\frac{X-\mu}{\sigma}$.
Elle suit donc la loi normale centrée réduite.

2. **b.** Par définition $P(X \leq \mu) = 0,5$

3. $P(37,9 \leq X \leq 53,1) = P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$

Partie B

1. **a.** On sait que $P_M(S) = 0,9$ et $P(M) = 0,01$
Par conséquent :

$$P_M(S) = \frac{P(M \cap S)}{P(M)}$$

$$P(M \cap S) = P_M(S) \times P(M)$$

$$= 0,9 \times 0,01$$

$$= 0,009$$

b. On calcule donc :

$$P_S(M) = \frac{P(S \cap M)}{P(S)} = \frac{0,009}{0,3} = 0,03$$

2. **a.** $P(H) = P(X > \alpha) = 1 - P(X \leq \alpha) = 1 - 0,995 = 0,005$

b. On veut donc calculer : $P_{\bar{H}}(M) = \frac{P(\bar{H} \cap M)}{P(\bar{H})}$

Or $P_H(M) = \frac{P(H \cap M)}{P(H)}$ soit $P(H \cap M) = 0,6 \times 0,005 = 0,003$.

Par conséquent, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(\bar{H} \cap M) + P(H \cap M) = P(M)$$

$$\Leftrightarrow P(\bar{H} \cap M) = 0,1 - 0,003$$

$$= 0,007$$

On obtient donc :

$$P_{\bar{H}}(M) = \frac{P(\bar{H} \cap M)}{P(\bar{H})}$$

$$= \frac{0,007}{0,995}$$

$$\approx 0,007$$

Partie C

1. $n = 1000 \geq 30$, $np = 1000 \times 0,01 = 10 \geq 5$ et $n(1-p) = 990 \geq 5$
   Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est donc :

$$I_{1000} = \left[0,01 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,01 \times 0,99}}{\sqrt{1000}} ; 0,01 + 1,96 \times \frac{\sqrt{0,01 \times 0,99}}{\sqrt{1000}}\right]$$

$$\approx [0,003 ; 0,017]$$

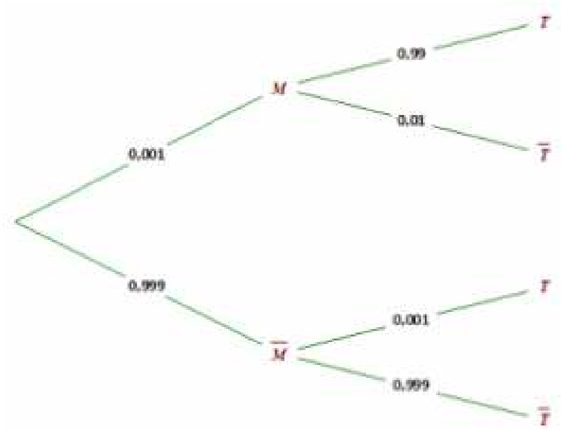
2. La fréquence observée est $f = \frac{14}{1000} = 0,014 \in I_{1000}$.
   On ne peut donc pas dire que le gêne a une influence sur la maladie.

[collapse]

CORRECTION de l'exercice n° 4

Partie A

1. a.



b. D'après la formule des probabilités totales on a :

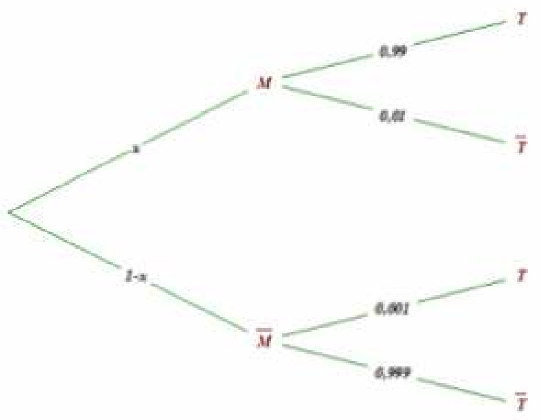
$$\begin{aligned} P(T) &= P(T \cap M) + P\left(T \cap \overline{M}\right) \\ &= 0,001 \times 0,99 + 0,999 \times 0,001 \\ &= 0,001989 \\ &= 1,989 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

c. Déterminons :

$$\begin{aligned} P_T(M) &= \frac{P(T \cap M)}{P(T)} \\ &= \frac{0,001 \times 0,99}{1,989 \times 10^{-3}} \\ &= \frac{110}{221} < 0,5 \end{aligned}$$

Si le test est positif, il y a donc moins d'une chance sur 2 que la personne soit malade. L'affirmation est vraie.

2. On obtient alors l'arbre suivant :



En utilisant la formule des probabilités totales on obtient :

$$P(T) = 0,99x + 0,001(1-x)$$
$$= 0,001 + 0,989x$$

On veut :

$$P_T(M) \geq 0,95 \Leftrightarrow \frac{P(M \cap T)}{P(T)} \geq 0,95$$
$$\Leftrightarrow \frac{0,99x}{0,001 + 0,989x} \geq 0,95$$
$$\Leftrightarrow 0,99x \geq 0,95(0,001 + 0,989x)$$
$$\Leftrightarrow 0,05045x \geq 0,00095$$
$$\Leftrightarrow x \geq \frac{19}{1009}$$

Il faut donc que $x \geq \frac{19}{1009}$ pour que le laboratoire commercialise le test.

Partie B

1. a. On calcule donc $P(890 \leq X \leq 920) \approx 0,92$

b.

$$P(900-h \leq X \leq 900+h) \approx 0,99 \Leftrightarrow P\left(-\frac{h}{7} \leq \frac{X-900}{7} \leq \frac{h}{7}\right) \approx 0,99$$
$$\Leftrightarrow 2P(\left(\frac{X-900}{7} \leq \frac{h}{7}\right) - 1 \approx 0,99$$
$$\Leftrightarrow 2P\left(\frac{X-900}{7} \leq \frac{h}{7}\right) \approx 1,99$$
$$\Leftrightarrow P\left(\frac{X-900}{7} \leq \frac{h}{7}\right) \approx 0,995$$

En effet la variable $\dfrac{X-900}{7}$ suit la loi normale centrée réduite.

La calculatrice nous donne donc $\dfrac{h}{7} \approx 2,5758$ d'où $h = 18$ (h est un entier)

Remarque : Puisqu'on sait que h est un entier, on peut calculer, en expliquant sa démarche sur la copie, toutes les valeurs de $P(900-h \leq X \leq 900+h)$ jusqu'à ce qu'on obtienne environ $0,99$.

2. $n = 1000 \geq 30$, $np = 970 \geq 5$ et $n(1-p) = 30 \geq 5$
   Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est donc :

$$I_{1000} = \left[0,97 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,97 \times 0,03}}{\sqrt{1000}} ; 0,97 + 1,96 \times \frac{\sqrt{0,97 \times 0,03}}{\sqrt{1000}}\right]$$

$$\approx [0,959; 0,981]$$

La fréquence observée des comprimés conformes est $f = \dfrac{947}{1000} = 0,947 \notin I_{1000}$.

De plus $f < 0,959$.

Les réglage faits par le laboratoire ne sont donc pas convenables.

[collapse]